

**NORME
INTERNATIONALE
INTERNATIONAL
STANDARD**

**CEI
IEC**

61710

Première édition
First edition
2000-11

**Modèle de loi en puissance –
Test d'adéquation et méthodes d'estimation
des paramètres**

**Power law model –
Goodness-of-fit tests and estimation methods**



Numéro de référence
Reference number
CEI/IEC 61710:2000

Numérotation des publications

Depuis le 1er janvier 1997, les publications de la CEI sont numérotées à partir de 60000. Ainsi, la CEI 34-1 devient la CEI 60034-1.

Editions consolidées

Les versions consolidées de certaines publications de la CEI incorporant les amendements sont disponibles. Par exemple, les numéros d'édition 1.0, 1.1 et 1.2 indiquent respectivement la publication de base, la publication de base incorporant l'amendement 1, et la publication de base incorporant les amendements 1 et 2.

Informations supplémentaires sur les publications de la CEI

Le contenu technique des publications de la CEI est constamment revu par la CEI afin qu'il reflète l'état actuel de la technique. Des renseignements relatifs à cette publication, y compris sa validité, sont disponibles dans le Catalogue des publications de la CEI (voir ci-dessous) en plus des nouvelles éditions, amendements et corrigenda. Des informations sur les sujets à l'étude et l'avancement des travaux entrepris par le comité d'études qui a élaboré cette publication, ainsi que la liste des publications parues, sont également disponibles par l'intermédiaire de:

- Site web de la CEI (www.iec.ch)
- Catalogue des publications de la CEI

Le catalogue en ligne sur le site web de la CEI (www.iec.ch/catlg-f.htm) vous permet de faire des recherches en utilisant de nombreux critères, comprenant des recherches textuelles, par comité d'études ou date de publication. Des informations en ligne sont également disponibles sur les nouvelles publications, les publications remplacées ou retirées, ainsi que sur les corrigenda.

- IEC Just Published

Ce résumé des dernières publications parues (www.iec.ch/JP.htm) est aussi disponible par courrier électronique. Veuillez prendre contact avec le Service client (voir ci-dessous) pour plus d'informations.

- Service clients

Si vous avez des questions au sujet de cette publication ou avez besoin de renseignements supplémentaires, prenez contact avec le Service clients:

Email: custserv@iec.ch
Tél: +41 22 919 02 11
Fax: +41 22 919 03 00

Publication numbering

As from 1 January 1997 all IEC publications are issued with a designation in the 60000 series. For example, IEC 34-1 is now referred to as IEC 60034-1.

Consolidated editions

The IEC is now publishing consolidated versions of its publications. For example, edition numbers 1.0, 1.1 and 1.2 refer, respectively, to the base publication, the base publication incorporating amendment 1 and the base publication incorporating amendments 1 and 2.

Further information on IEC publications

The technical content of IEC publications is kept under constant review by the IEC, thus ensuring that the content reflects current technology. Information relating to this publication, including its validity, is available in the IEC Catalogue of publications (see below) in addition to new editions, amendments and corrigenda. Information on the subjects under consideration and work in progress undertaken by the technical committee which has prepared this publication, as well as the list of publications issued, is also available from the following:

- IEC Web Site (www.iec.ch)
- Catalogue of IEC publications

The on-line catalogue on the IEC web site (www.iec.ch/catlg-e.htm) enables you to search by a variety of criteria including text searches, technical committees and date of publication. On-line information is also available on recently issued publications, withdrawn and replaced publications, as well as corrigenda.

- IEC Just Published

This summary of recently issued publications (www.iec.ch/JP.htm) is also available by email. Please contact the Customer Service Centre (see below) for further information.

- Customer Service Centre

If you have any questions regarding this publication or need further assistance, please contact the Customer Service Centre:

Email: custserv@iec.ch
Tel: +41 22 919 02 11
Fax: +41 22 919 03 00

**NORME
INTERNATIONALE
INTERNATIONAL
STANDARD**

**CEI
IEC**

61710

Première édition
First edition
2000-11

**Modèle de loi en puissance –
Test d'adéquation et méthodes d'estimation
des paramètres**

**Power law model –
Goodness-of-fit tests and estimation methods**

© IEC 2000 Droits de reproduction réservés — Copyright - all rights reserved

Aucune partie de cette publication ne peut être reproduite ni utilisée sous quelque forme que ce soit et par aucun procédé, électronique ou mécanique, y compris la photocopie et les microfilms, sans l'accord écrit de l'éditeur.

No part of this publication may be reproduced or utilized in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and microfilm, without permission in writing from the publisher.

International Electrotechnical Commission
Telefax: +41 22 919 0300

3, rue de Varembé Geneva, Switzerland
e-mail: inmail@iec.ch IEC web site <http://www.iec.ch>



Commission Electrotechnique Internationale
International Electrotechnical Commission
Международная Электротехническая Комиссия

CODE PRIX
PRICE CODE

W

Pour prix, voir catalogue en vigueur
For price, see current catalogue

SOMMAIRE

	Pages
AVANT-PROPOS	4
INTRODUCTION	6
Articles	
1 Domaine d'application	8
2 Références normatives.....	8
3 Définitions.....	8
4 Symboles et abréviations.....	8
5 Modèle de loi en puissance	12
6 Prescriptions relatives aux données.....	12
6.1 Cas 1 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte pour un ou plusieurs exemplaires de la même population	12
6.2 Cas 2 – Données temporelles pour les groupes de défaillances à prendre en compte pour un ou plusieurs exemplaires de la même population	16
6.3 Cas 3 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte pour plus d'une entité réparée de populations différentes.....	16
7 Estimation statistique et procédures d'essai.....	18
7.1 Généralités	18
7.2 Estimation ponctuelle	18
7.3 Tests d'adéquation.....	24
7.4 Intervalles de confiance pour le paramètre de forme.....	28
7.5 Intervalles de confiance pour l'intensité de défaillance	34
7.6 Intervalles de prédiction pour les durées jusqu'aux défaillances futures d'une entité unique	36
7.7 Test d'égalité des paramètres de forme $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$	40
Annexe A (informative) Modèle de loi en puissance – Informations connexes	54
Annexe B (informative) Exemples numériques	56
B.1 Introduction.....	56
B.2 Exemple 1	56
B.3 Exemple 2	60
B.4 Exemple 3	66
B.5 Exemple 4	70
Bibliographie	76

CONTENTS

	Page
FOREWORD	5
INTRODUCTION	7
Clause	
1 Scope	9
2 Normative references	9
3 Definitions	9
4 Symbols and abbreviations	9
5 Power law model	13
6 Data requirements	13
6.1 Case 1 – Time data for every relevant failure for one or more copies from the same population	13
6.2 Case 2 – Time data for groups of relevant failures for one or more copies from the same population	17
6.3 Case 3 – Time data for every relevant failure for more than one repaired item from different populations	17
7 Statistical estimation and test procedures	19
7.1 Overview	19
7.2 Point estimation	19
7.3 Goodness-of-fit tests	25
7.4 Confidence intervals for the shape parameter	29
7.5 Confidence intervals for the failure intensity	35
7.6 Prediction intervals for the length of time to future failures of a single item	37
7.7 Test for the equality of the shape parameters $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$	41
Annex A (informative) The power law model – Background information	55
Annex B (informative) Numerical examples	57
B.1 Introduction	57
B.2 Example 1	57
B.3 Example 2	61
B.4 Example 3	67
B.5 Example 4	71
Bibliography	77

COMMISSION ÉLECTROTECHNIQUE INTERNATIONALE

MODÈLE DE LOI EN PUISSANCE – TEST D'ADÉQUATION ET MÉTHODES D'ESTIMATION DES PARAMÈTRES

AVANT-PROPOS

- 1) La CEI (Commission Electrotechnique Internationale) est une organisation mondiale de normalisation composée de l'ensemble des comités électrotechniques nationaux (Comités nationaux de la CEI). La CEI a pour objet de favoriser la coopération internationale pour toutes les questions de normalisation dans les domaines de l'électricité et de l'électronique. A cet effet, la CEI, entre autres activités, publie des Normes internationales. Leur élaboration est confiée à des comités d'études, aux travaux desquels tout Comité national intéressé par le sujet traité peut participer. Les organisations internationales, gouvernementales et non gouvernementales, en liaison avec la CEI, participent également aux travaux. La CEI collabore étroitement avec l'Organisation Internationale de Normalisation (ISO), selon des conditions fixées par accord entre les deux organisations.
- 2) Les décisions ou accords officiels de la CEI concernant les questions techniques représentent, dans la mesure du possible, un accord international sur les sujets étudiés, étant donné que les Comités nationaux intéressés sont représentés dans chaque comité d'études.
- 3) Les documents produits se présentent sous la forme de recommandations internationales. Ils sont publiés comme normes, spécifications techniques, rapports techniques ou guides et agréés comme tels par les Comités nationaux.
- 4) Dans le but d'encourager l'unification internationale, les Comités nationaux de la CEI s'engagent à appliquer de façon transparente, dans toute la mesure possible, les Normes internationales de la CEI dans leurs normes nationales et régionales. Toute divergence entre la norme de la CEI et la norme nationale ou régionale correspondante doit être indiquée en termes clairs dans cette dernière.
- 5) La CEI n'a fixé aucune procédure concernant le marquage comme indication d'approbation et sa responsabilité n'est pas engagée quand un matériel est déclaré conforme à l'une de ses normes.
- 6) L'attention est attirée sur le fait que certains des éléments de la présente Norme internationale peuvent faire l'objet de droits de propriété intellectuelle ou de droits analogues. La CEI ne saurait être tenue pour responsable de ne pas avoir identifié de tels droits de propriété et de ne pas avoir signalé leur existence.

La Norme internationale CEI 61710 a été établie par le comité d'études 56 de la CEI: Sûreté de fonctionnement.

Le texte de cette norme est issu des documents suivants:

FDIS	Rapport de vote
56/704/FDIS	56/717/RVD

Le rapport de vote indiqué dans le tableau ci-dessus donne toute information sur le vote ayant abouti à l'approbation de cette norme.

Cette publication a été rédigée selon les Directives ISO/CEI, Partie 3.

Les annexes A et B sont données uniquement à titre d'information.

Le comité a décidé que le contenu de cette publication ne sera pas modifié avant 2005. A cette date, la publication sera

- reconduite;
- supprimée;
- remplacée par une édition révisée, ou
- amendée.

Le contenu du corrigendum de septembre 2001 a été pris en considération dans cet exemplaire.

INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION

**POWER LAW MODEL –
GOODNESS-OF-FIT TESTS AND ESTIMATION METHODS**

FOREWORD

- 1) The IEC (International Electrotechnical Commission) is a worldwide organization for standardization comprising all national electrotechnical committees (IEC National Committees). The object of the IEC is to promote international co-operation on all questions concerning standardization in the electrical and electronic fields. To this end and in addition to other activities, the IEC publishes International Standards. Their preparation is entrusted to technical committees; any IEC National Committee interested in the subject dealt with may participate in this preparatory work. International, governmental and non-governmental organizations liaising with the IEC also participate in this preparation. The IEC collaborates closely with the International Organization for Standardization (ISO) in accordance with conditions determined by agreement between the two organizations.
- 2) The formal decisions or agreements of the IEC on technical matters express, as nearly as possible, an international consensus of opinion on the relevant subjects since each technical committee has representation from all interested National Committees.
- 3) The documents produced have the form of recommendations for international use and are published in the form of standards, technical specifications, technical reports or guides and they are accepted by the National Committees in that sense.
- 4) In order to promote international unification, IEC National Committees undertake to apply IEC International Standards transparently to the maximum extent possible in their national and regional standards. Any divergence between the IEC Standard and the corresponding national or regional standard shall be clearly indicated in the latter.
- 5) The IEC provides no marking procedure to indicate its approval and cannot be rendered responsible for any equipment declared to be in conformity with one of its standards.
- 6) Attention is drawn to the possibility that some of the elements of this International Standard may be the subject of patent rights. The IEC shall not be held responsible for identifying any or all such patent rights.

International Standard IEC 61710 has been prepared by IEC technical committee 56: Dependability.

The text of this standard is based on the following documents:

FDIS	Report on voting
56/704/FDIS	56/717/RVD

Full information on the voting for the approval of this standard can be found in the report on voting indicated in the above table.

This publication has been drafted in accordance with the ISO/IEC Directives, Part 3.

Annexes A and B are for information only.

The committee has decided that the contents of this publication will remain unchanged until 2005. At this date, the publication will be

- reconfirmed;
- withdrawn;
- replaced by a revised edition, or
- amended.

The contents of the corrigenda of September 2001 have been included in this copy.

INTRODUCTION

La présente Norme internationale décrit le modèle de loi en puissance et donne des indications étape par étape pour son utilisation. Il existe différents modèles pour décrire la fiabilité des entités réparées, le modèle de loi en puissance étant l'un des plus largement utilisés. La présente norme fournit des procédures pour l'estimation des paramètres du modèle en puissance et pour vérifier l'adéquation du modèle de loi en puissance avec les données et les intervalles de confiance pour l'intensité de défaillance et les intervalles de prédiction pour les durées jusqu'aux défaillances futures. Comme donnée de départ, il est exigé de fournir les temps d'essai auxquels les défaillances à prendre en compte se sont produites ou ont été observées pour une entité réparée ou plusieurs exemplaires de la même entité ainsi que le temps de fin de l'observation de l'entité s'il est différent de celui de la dernière défaillance. Tous les résultats obtenus correspondent au type d'entité considéré.

Quelques-unes de ces procédures peuvent nécessiter des programmes informatiques mais elles ne sont pas excessivement complexes. Cette norme présente des algorithmes pour lesquels des programmes devraient être facilement conçus.

INTRODUCTION

This International Standard describes the power law model and gives step-by-step directions for its use. There are various models for describing the reliability of repaired items, the power law model being one of the most widely used. This standard provides procedures to estimate the parameters of the power law model and to test the goodness-of-fit of the power law model to data; to provide confidence intervals for the failure intensity and prediction intervals for the length of time to future failures. An input is required consisting of a data set of times at which relevant failures occurred, or were observed, for a repaired item or a set of copies of the same item, and the time observation of the item was terminated, if different from the time of final failure. All output results correspond to the item type under consideration.

Some of the procedures may require computer programs, but these are not unduly complex. This standard presents algorithms from which computer programs should be easy to construct.

Withdrawing
IECNORM.COM: Click to view the full PDF of IEC 61710:2000

MODÈLE DE LOI EN PUISSANCE – TEST D'ADÉQUATION ET MÉTHODES D'ESTIMATION DES PARAMÈTRES

1 Domaine d'application

La présente Norme internationale spécifie les procédures pour l'estimation des paramètres du modèle de loi en puissance en fournissant les intervalles de confiance pour l'intensité de défaillance, les intervalles de prédiction pour les défaillances futures et pour déterminer l'adéquation du modèle de loi en puissance avec les données relatives aux entités réparées.

2 Références normatives

Les documents normatifs suivants contiennent des dispositions qui, par suite de la référence qui y est faite, constituent des dispositions valables pour la présente Norme internationale. Pour les références datées, les amendements ultérieurs ou les révisions de ces publications ne s'appliquent pas. Toutefois, les parties prenantes aux accords fondés sur la présente Norme internationale sont invitées à rechercher la possibilité d'appliquer les éditions les plus récentes des documents normatifs indiqués ci-après. Pour les références non datées, la dernière édition du document normatif en référence s'applique. Les membres de la CEI et de l'ISO possèdent le registre des Normes internationales en vigueur.

CEI 60050(191):1990, *Vocabulaire Electrotechnique International (VEI) – Chapitre 191: Sûreté de fonctionnement et qualité de service*

3 Définitions

Pour les besoins de la présente Norme internationale, les termes et définitions de la CEI 60050(191) s'appliquent.

4 Symboles et abréviations

Les symboles et abréviations suivants s'appliquent.

β	paramètre de forme du modèle de loi en puissance
$\hat{\beta}$	paramètre de forme estimé du modèle de loi en puissance
β_{LB}, β_{UB}	limites de confiance inférieure, supérieure pour β
C^2	statistique du test d'adéquation de Cramer-von-Mises
$C^2_{1-\gamma}(M)$	valeur critique pour la statistique du test d'adéquation de Cramer-von-Mises au niveau γ de signification
χ^2	statistique du test d'adéquation de khi-deux
$\chi^2_{\gamma}(v)$	fractile γ de la distribution du χ^2 avec v degrés de liberté
d	nombre d'intervalles pour les groupes de défaillances
$E[N(t)]$	espérance mathématique du nombre cumulé de défaillances jusqu'au temps t
$E[t_j]$	espérance mathématique du temps de fonctionnement cumulé jusqu'à la $j^{\text{ème}}$ défaillance

POWER LAW MODEL – GOODNESS-OF-FIT TESTS AND ESTIMATION METHODS

1 Scope

This International Standard specifies procedures to estimate the parameters of the power law model, to provide confidence intervals for the failure intensity, to provide prediction intervals for the times to future failures, and to test the goodness-of-fit of the power law model to data from repaired items.

2 Normative references

The following normative documents contain provisions which, through reference in this text, constitute provisions of this International Standard. For dated references, subsequent amendments to, or revisions of, any of these publications do not apply. However, parties to agreements based on this International Standard are encouraged to investigate the possibility of applying the most recent editions of the normative documents indicated below. For undated references, the latest edition of the normative document referred to applies. Members of IEC and ISO maintain registers of currently valid International Standards.

IEC 60050(191):1990, *International Electrotechnical Vocabulary (IEV) – Chapter 191: Dependability and quality of service*

3 Definitions

For the purposes of this International Standard, the terms and definitions of IEC 60050(191) apply.

4 Symbols and abbreviations

For the purposes of this International Standard, the following symbols and abbreviations apply:

β	shape parameter of the power law model
$\hat{\beta}$	estimated shape parameter of the power law model
β_{LB}, β_{UB}	lower, upper confidence limits for β
C^2	Cramer-von-Mises goodness-of-fit test statistic
$C_{1-\gamma}^2(M)$	Critical value for the Cramer-von-Mises goodness-of-fit test statistic at γ level of significance
χ^2	Chi-square goodness of fit test statistic
$\chi_{\gamma}^2(\nu)$	γ th fractile of the χ^2 distribution with ν degrees of freedom
d	number of intervals for groups of failures
$E[N(t)]$	expected accumulated number of failures up to time t
$E[t_j]$	expected accumulated operating time to j th failure

$\hat{E}[N[t(i)]]$	espérance mathématique estimée du nombre cumulé de défaillances jusqu'à l'instant $t(i)$
$\hat{E}[t_j]$	espérance mathématique estimée du temps de fonctionnement jusqu'à la $j^{\text{ème}}$ défaillance
$F_\gamma(v_1, v_2)$	fractile γ pour la distribution F avec (v_1, v_2) degrés de liberté
i	indice à usage général
j	indice à usage général
k	nombre d'entités
L, U	multiplicateurs utilisés dans le calcul des intervalles de confiance pour l'intensité de défaillance
λ	paramètre d'échelle du modèle de loi en puissance
$\hat{\lambda}$	paramètre d'échelle estimé du modèle de loi en puissance
M	paramètre du test statistique de Cramer-von-Mises
N	nombre de défaillances à prendre en compte
N_j	nombre de défaillances pour la $j^{\text{ème}}$ entité
$N(t)$	nombre cumulé de défaillances jusqu'au temps t
$N[t(i)]$	nombre cumulé de défaillances jusqu'au temps $t(i)$
R	différence entre le rang de la défaillance future (prévue) et le rang de la dernière défaillance (observée)
T	temps de fonctionnement cumulé à prendre en compte
T^*	temps de fonctionnement total cumulé à prendre en compte pour un essai censuré par le temps
T_j	temps de fonctionnement total cumulé à prendre en compte pour la $j^{\text{ème}}$ entité
T_{RL}, T_{RU}	limites inférieure, supérieure pour le temps jusqu'à la $R^{\text{ème}}$ défaillance future
$\hat{T}_{N+1}$	temps médian estimé jusqu'à la $(N+1)^{\text{ème}}$ défaillance
t_i	temps de fonctionnement cumulé à prendre en compte pour la $i^{\text{ème}}$ défaillance
t_{ij}	temps de défaillance $i^{\text{ème}}$ pour la $j^{\text{ème}}$ entité
t_N	temps de fonctionnement total cumulé à prendre en compte pour un essai censuré par une défaillance
t_{Nj}	temps de fonctionnement total cumulé à prendre en compte jusqu'à la $N^{\text{ème}}$ défaillance de la $j^{\text{ème}}$ entité
$t(i-1), t(i)$	points extrêmes du $i^{\text{ème}}$ intervalle de temps de fonctionnement pour les défaillances groupées
$z(t)$	intensité de défaillance à l'instant t
$\hat{z}(t)$	intensité de défaillance estimée à l'instant t
z_{LB}, z_{UB}	limites de confiance inférieure, supérieure pour l'intensité de défaillance

$\hat{E}[N[t(i)]]$	estimated expected accumulated number of failures up to $t(i)$
$\hat{E}[t_j]$	estimated expected accumulated operating time to j th failure
$F_\gamma(v_1, v_2)$	γ th fractile for the F distribution with (v_1, v_2) degrees of freedom
i	general purpose indicator
j	general purpose indicator
k	number of items
L, U	multipliers used in calculation of confidence intervals for failure intensity
λ	scale parameter of the power law model
$\hat{\lambda}$	estimated scale parameter of the power law model
M	parameter for Cramer-von-Mises statistical test
N	number of relevant failures
N_j	number of failures for j th item
$N(t)$	accumulated number of failures up to time t
$N[t(i)]$	accumulated number of failures up to time $t(i)$
R	difference between the order number of future (predicted) failure and order number of last (observed) failure
T	accumulated relevant operating time
T^*	total accumulated relevant operating time for time terminated test
T_j	total accumulated relevant operating time for j th item
T_{RL}, T_{RU}	lower, upper prediction limits for the length of time to the R th future failure
$\hat{T}_{N+1}$	estimated median time to $(N+1)$ th failure
t_i	accumulated relevant operating time to the i th failure
t_{ij}	i th failure time for j th item
t_N	total accumulated relevant operating time for failure terminated test
t_{Nj}	total accumulated relevant operating time for to N th failure of j th item
$t(i-1), t(i)$	endpoints of i th interval of operating time for grouped failures
$z(t)$	failure intensity at time t
$\hat{z}(t)$	estimated failure intensity at time t
z_{LB}, z_{UB}	lower, upper confidence limits for failure intensity

5 Modèle de loi en puissance

Les procédures statistiques pour le modèle de loi en puissance utilisent les données de défaillance et les données temporelles à prendre en compte issues des essais ou du retour d'expérience.

Les équations de base pour le modèle de loi en puissance sont données dans cet article. Des informations complémentaires sur ce modèle sont données à l'annexe A et des exemples de leur application à l'annexe B.

L'espérance mathématique du nombre cumulé de défaillances jusqu'au temps d'essai t est donnée par

$$E[N(t)] = \lambda t^\beta \quad \text{avec } \lambda > 0, \beta > 0, t > 0$$

où

λ est le paramètre d'échelle;

β est le paramètre de forme ($0 < \beta < 1$ correspond à une intensité de défaillance décroissante; $\beta = 1$ correspond à une intensité de défaillance constante; $\beta > 1$ correspond à une intensité de défaillance croissante).

L'intensité de défaillance à l'instant t est donnée par

$$z(t) = \frac{d}{dt} E[N(t)] = \lambda \beta t^{\beta-1} \quad \text{avec } t > 0$$

Ainsi les paramètres λ et β ont tous les deux une influence sur l'intensité de défaillance à un moment donné.

Des méthodes sont données en 7.2 pour obtenir les estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres λ et β . Le paragraphe 7.3 donne les tests d'adéquation pour le modèle et 7.4 et 7.5 donnent les procédures pour les intervalles de confiance. Le paragraphe 7.6 donne les procédures pour les intervalles de prédiction et 7.7 les tests pour l'égalité des paramètres de forme.

Le modèle est simple à évaluer. Cependant, lorsque $\beta < 1$, théoriquement $z(0) = \infty$ (c'est-à-dire que $z(t)$ tend vers l'infini quand t tend vers zéro) et $z(\infty) = 0$ (c'est-à-dire $z(t)$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini); mais cette limitation théorique n'affecte généralement pas son utilisation pratique.

6 Prescriptions relatives aux données

6.1 Cas 1 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte pour un ou plusieurs exemplaires de la même population

Les méthodes normales d'évaluation supposent que les temps observés correspondent exactement aux temps de défaillance d'une entité unique réparée ou d'un ensemble d'exemplaires d'une même entité réparée. Les figures ci-dessous illustrent comment les temps de défaillance sont calculés pour trois cas généraux.

5 Power law model

The statistical procedures for the power law model use the relevant failure and time data from the test or field studies.

The basic equations for the power law model are given in this clause. Background information on the model is given in annex A and examples of its application are given in annex B.

The expected accumulated number of failures up to test time t is given by

$$E[N(t)] = \lambda t^\beta \text{ with } \lambda > 0, \beta > 0, t > 0$$

where

λ is the scale parameter;

β is the shape parameter ($0 < \beta < 1$ corresponds to a decreasing failure intensity; $\beta = 1$ corresponds to a constant failure intensity; $\beta > 1$ corresponds to an increasing failure intensity).

The failure intensity at time t is given by

$$z(t) = \frac{d}{dt} E[N(t)] = \lambda \beta t^{\beta-1} \text{ with } t > 0$$

Thus the parameters λ and β both affect the failure intensity in a given time.

Methods are given in 7.2 for maximum likelihood estimation of the parameters of λ and β . Subclause 7.3 gives goodness-of-fit tests for the model and 7.4 and 7.5 give confidence interval procedures. Subclause 7.6 gives prediction interval procedures and 7.7 gives tests for the equality of the shape parameters.

The model is simple to evaluate. However when $\beta < 1$, theoretically $z(0) = \infty$ (i.e. $z(t)$ tends to infinity as t tends to zero) and $z(\infty) = 0$ (i.e. $z(t)$ tends to zero as t tends to infinity); but this theoretical limitation does not generally affect its practical use.

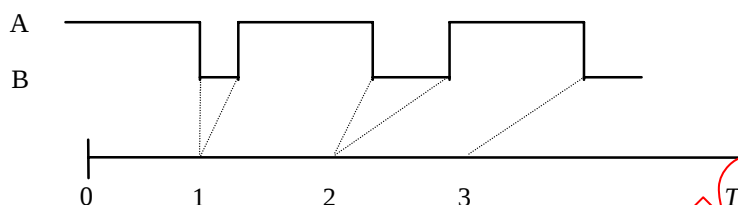
6 Data requirements

6.1 Case 1 – Time data for every relevant failure for one or more copies from the same population

The normal evaluation methods assume the observed times to be exact times of failure of a single repaired item or a set of copies of the same repaired item. The figures below illustrate how the failure times are calculated for three general cases.

6.1.1 Cas 1a) – Une entité réparée

Pour une entité réparée observée de l'âge 0 à l'âge T , le temps de défaillance à prendre en compte, t_i , est le temps de fonctionnement qui s'est écoulé (c'est-à-dire sans les temps de réparation et autres temps à l'arrêt) jusqu'à l'apparition de la $i^{\text{ème}}$ défaillance (voir Figure 1).



Légende

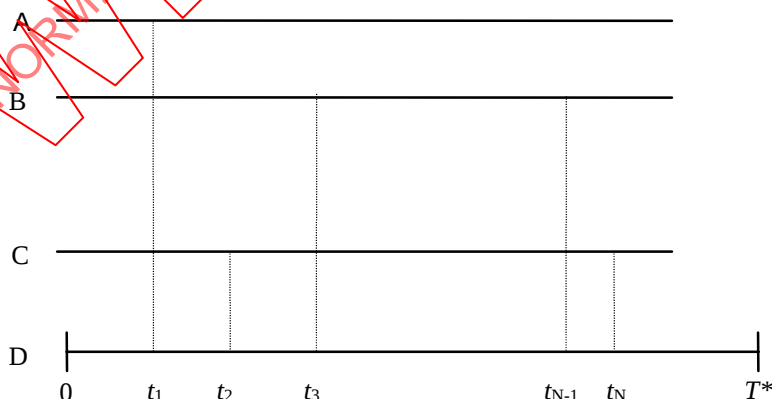
- A temps de fonctionnement
- B temps d'arrêt

Figure 1 – Une entité réparée

Les données censurées par le temps sont observées jusqu'à T^* , qui n'est pas un instant de défaillance et les données censurées par une défaillance sont observées jusqu'à t_N , qui est l'instant de la $N^{\text{ème}}$ défaillance. Les données censurées par le temps et celles censurées par une défaillance utilisent des formules légèrement différentes.

6.1.2 Cas 1b) – Exemples multiples d'entités réparées observées pendant la même durée

On suppose qu'il y a k entités qui représentent toutes la même population. Cela signifie qu'elles sont nominalement des copies identiques fonctionnant dans les mêmes conditions (par exemple, environnement et charge). Lorsque toutes les copies sont observées jusqu'à l'instant T^* , qui n'est pas un instant de défaillance (c'est-à-dire des données censurées par le temps), alors les données de temps de défaillance sont combinées en superposant les temps de défaillance ($t_i, i = 1, 2, \dots, N$) pour tous les systèmes k sur la même ligne temporelle (voir Figure 2).



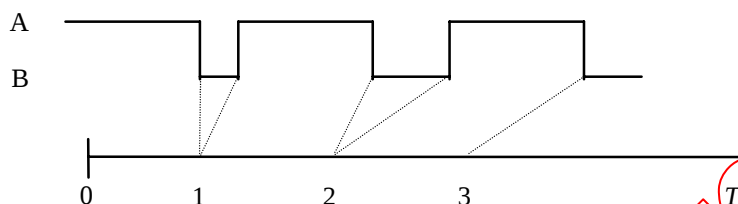
Légende

- A entité 1
- B entité 2
- C entité k
- D processus superposé

Figure 2 – Exemples multiples d'entités réparées observées pendant la même durée

6.1.1 Case 1a) – One repaired item

For one repaired item observed from age 0 to age T , the relevant failure time, t_i , is the elapsed operating time (that is, excluding repair and other down times) until the occurrence of the i th failure as shown in Figure 1.



Key

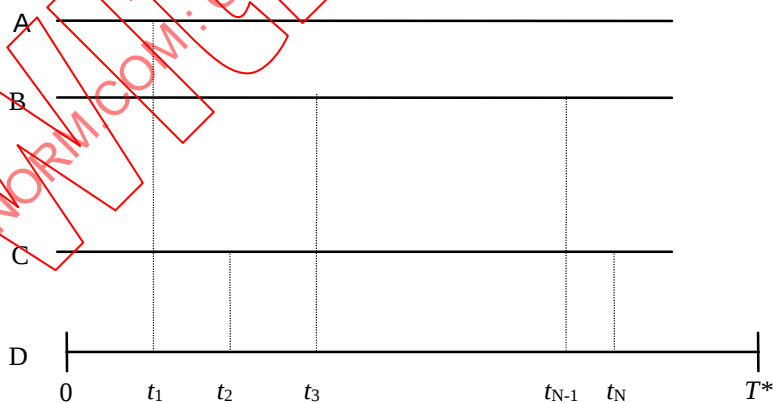
- A operating time
- B down time

Figure 1 – One repaired item

Time terminated data are observed to T^* , which is not a failure time, and failure terminated data are observed to t_N , which is the time of the N th failure. Time terminated and failure terminated data use slightly different formulae.

6.1.2 Case 1b) – Multiple copies of repaired item observed for same length of time

It is assumed there are k items, which all represent the same population. That is, they are nominally identical copies operating under the same conditions (e.g. environment and load). When all copies are observed to time T^* , which is not a failure time (i.e. time terminated data), then the failure time data are combined by superimposing failure times ($t_i, i = 1, 2, \dots, N$) for all k systems on the same time line as shown in Figure 2.



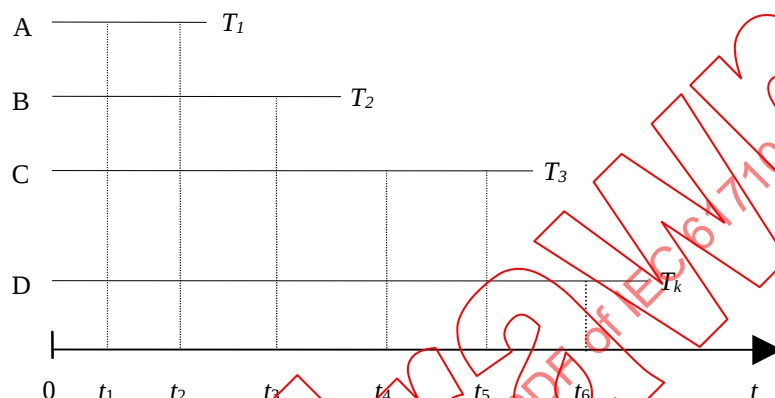
Key

- A item 1
- B item 2
- C item k
- D superimposed process

Figure 2 – Multiple copies of repaired item observed for same length of time

6.1.3 Cas 1c) – Exemplaires multiples d'entités réparées observées pendant des durées différentes

Lorsque tous les exemplaires ne fonctionnent pas pendant la même durée, on note le moment auquel l'observation de la $j^{\text{ième}}$ copie s'est terminée $T_j (j = 1, 2, \dots, k)$, où $T_1 < T_2 < \dots < T_k$ est noté. Les données relatives aux défaillances sont combinées en superposant tous les moments de défaillance pour tous les k exemplaires sur la même ligne temporelle (voir Figure 3). Les temps de fonctionnement jusqu'à la défaillance sont $t_i, i = 1, 2, \dots, N$, où N est égal au nombre total de défaillances observé en cumulé sur les k copies.



Légende

A	entité 1
B	entité 2
C	entité 3
D	entité k
t	temps

Figure 3 – Exemplaires multiples d'entités réparées observées pendant des durées différentes

NOTE Lorsque chaque entité est un système informatique, il convient que la réparation soit effectuée sur les autres systèmes qui ne sont pas défaillant à cet instant.

6.2 Cas 2 – Données temporelles pour les groupes de défaillances à prendre en compte pour un ou plusieurs exemplaires de la même population

Cette méthode alternative est utilisée lorsqu'il y a au moins un exemplaire d'une entité et que les données sont constituées par des intervalles de temps connus, chacun contenant un nombre connu de défaillances.

La période d'observation s'étend sur l'intervalle $(0, T)$ et elle est partagée en d intervalles aux moments $0 < t(1) < t(2) < \dots < t(d)$. Le $i^{\text{ième}}$ intervalle est la période qui s'étend entre $t(i-1)$ et $t(i)$, $i = 1, 2, \dots, d, t(0) = 0, t(d) = T$. Il est important de noter qu'il n'est pas nécessaire que les longueurs des intervalles et que les nombres de défaillances par intervalle soient les mêmes.

6.3 Cas 3 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte pour plus d'une entité réparée de populations différentes

On suppose qu'il existe k entités qui ne représentent pas la même population et qui doivent être comparées. Il convient de noter que si chaque entité doit être considérée de manière individuelle alors il est approprié d'utiliser le cas 1a) décrit en 6.1.1.

6.1.3 Case 1c) – Multiple copies of repaired item observed for different lengths of time

When all copies do not operate for the same period of time, then the time at which observation of the j th copy is terminated T_j ($j = 1, 2, \dots, k$), where $T_1 < T_2 < \dots < T_k$, is noted. The failure data are combined by superimposing all the failures times for all k copies on the same time line as shown in Figure 3. The operating times to failure are t_i , $i = 1, 2, \dots, N$, where N = the total number of failures observed accumulated over the k copies.

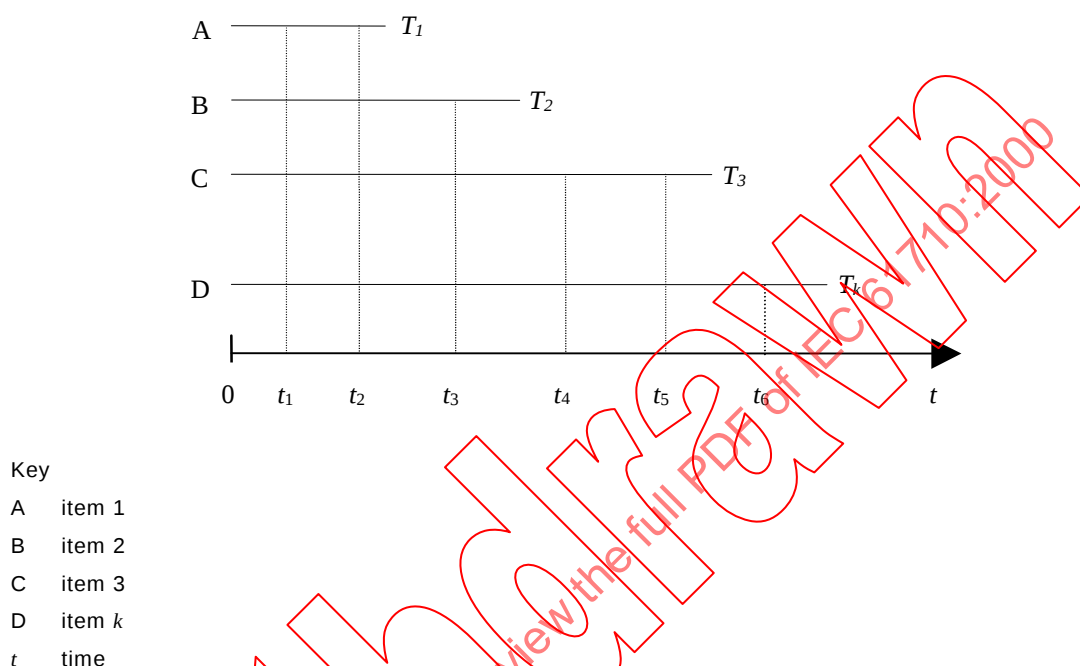


Figure 3 – Multiple copies of repaired item observed for different lengths of time

NOTE If each item is a software system then the repair action should be done to the other systems which did not fail at that time.

6.2 Case 2 – Time data for groups of relevant failures for one or more copies from the same population

This alternative method is used when there is at least one copy of an item and the data consists of known time intervals, each containing a known number of failures.

The observation period is over the interval $(0, T)$ and is partitioned into d intervals at times $0 < t(1) < t(2) < \dots < t(d)$. The i th interval is the time period between $t(i-1)$ and $t(i)$, $i = 1, 2, \dots, d$, $t(0) = 0$, $t(d) = T$. It is important to note that the interval lengths and the numbers of failures per interval need not be the same.

6.3 Case 3 – Time data for every relevant failure for more than one repaired item from different populations

It is assumed there are k items which do not represent the same population and are to be compared. It should be noted that if each item is to be considered individually then it is appropriate to use case 1a) in 6.1.1.

Lorsque des comparaisons directes des systèmes doivent être effectuées, la notation suivante est utilisée en plus de celle de 6.1:

t_{ij} indique le $i^{\text{ème}}$ instant de défaillance pour le processus correspondant à la $j^{\text{ème}}$ entité;

N_j indique le nombre de défaillances observées pour la $j^{\text{ème}}$ entité;

t_{N_j} est l'instant de la $N^{\text{ème}}$ défaillance pour la $j^{\text{ème}}$ entité;

où $i = 0, 1, 2, \dots, N_j$ et $j = 1, 2, \dots, k$.

7 Estimation statistique et procédures d'essai

7.1 Généralités

Dans le cas 1 – données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte – les formules indiquées pour les données censurées par une défaillance partent de l'hypothèse qu'il y a une entité réparée, c'est-à-dire $k=1$. Tous les résultats obtenus correspondent à cette entité. Les formules précisées pour les données censurées par le temps partent de l'hypothèse qu'on observe k copies de l'entité sur la même durée. S'il n'existe qu'une entité réparée, alors $k=1$. Les procédures d'estimation par point pour tous les cas mentionnés ci-dessus sont données en 7.2.1. Les procédures appropriées dans le cas où tous les exemplaires sont observés pour différentes durées sont données en 7.2.2. Les procédures pour le cas de données temporelles pour les groupes de défaillances à prendre en compte sont données en 7.2.3.

Un test d'adéquation approprié, comme décrit en 7.3, doit être effectué après les procédures d'estimation des paramètres de 7.2. Noter que ces tests et les procédures données de 7.4 à 7.7 pour la détermination des estimations d'intervalle et pour la réalisation des tests statistiques, font une distinction seulement entre les cas des données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte (c'est-à-dire toutes les instances des données du cas 1 – 1a), 1b) et 1c)) et les données temporelles pour les groupes de défaillances à prendre en compte (c'est-à-dire le cas 2).

NOTE Les procédures d'inférence qui suivent fournissent des estimations approchées dans certaines circonstances et il est nécessaire de prendre des précautions s'il faut qu'elles soient appliquées à de très petits échantillons de données.

7.2 Estimation ponctuelle

7.2.1 Cas 1a) et 1b) – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte

Cette méthode s'applique seulement lorsque les instants de défaillance ont été consignés pour chaque défaillance comme cela est décrit en 6.1.1 et 6.1.2.

Étape 1: Calculer les sommes:

$$S_1 = \sum_{j=1}^N \ln \left(\frac{T^*}{t_j} \right) \quad (\text{essai censuré par le temps})$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^N \ln \left(\frac{t_N}{t_j} \right) \quad (\text{essai censuré par une défaillance})$$

If direct comparisons of the systems are to be made then as an extension of 6.1 the following notation is used:

t_{ij} denotes the i th failure time for the process corresponding to the j th item;

N_j denotes the number of failures observed for the j th item;

t_{N_j} is the time of the N th failure for the j th item;

where $i = 0, 1, 2, \dots N_j$ and $j = 1, 2, \dots k$.

7 Statistical estimation and test procedures

7.1 Overview

In case 1 – time data for every relevant failure – the formulae given for failure terminated data assume one repaired item, that is $k=1$. All output results correspond to that item. The formulae given for time terminated data assume k copies of the item observed for the same length of time. If there is only one repaired item then $k=1$. The point estimation procedures for all the aforementioned cases are given in 7.2.1. The appropriate procedures for the case when all copies are observed for different lengths of time are given in 7.2.2. Procedures for the case of time data for groups of relevant failures are given in 7.2.3.

An appropriate goodness-of-fit test, as described in 7.3 shall be performed after the parameter estimation procedures of 7.2. Note that these tests, and the procedures given in 7.4 to 7.7 for constructing interval estimates and carrying out statistical tests, distinguish only between the cases of time data for every relevant failure (i.e. all instances of case 1 data – 1a), 1b) and 1c)) and time data for groups of relevant failures (i.e. case 2).

NOTE The inference procedures that follow provide approximate estimates in some circumstances and so caution is required if they are to be applied to very small samples of data.

7.2 Point estimation

7.2.1 Case 1a) and 1b) – Time data for every relevant failure

This method applies only when the time of failure has been logged for every failure as described in 6.1.1 and 6.1.2.

Step 1: Calculate the summation:

$$S_1 = \sum_{j=1}^N \ln \left(\frac{T^*}{t_j} \right) \quad (\text{time terminated})$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^N \ln \left(\frac{t_N}{t_j} \right) \quad (\text{failure terminated})$$

Étape 2: Calculer l'estimation (non biaisée) du paramètre de forme β à partir de la formule:

$$\hat{\beta} = \frac{N-1}{S_1} \quad (\text{essai censuré par le temps})$$

$$\hat{\beta} = \frac{N-2}{S_2} \quad (\text{essai censuré par une défaillance})$$

Étape 3: Calculer l'estimation du paramètre d'échelle λ à partir de la formule:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{k(T^*)^{\hat{\beta}}} \quad (\text{essai censuré par le temps})$$

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{(t_N)^{\hat{\beta}}} \quad (\text{essai censuré par une défaillance})$$

Étape 4: Calculer l'estimation de l'intensité de défaillance $z(t)$, pour tout instant $t > 0$, à partir de la formule:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda} \hat{\beta} t^{\hat{\beta}-1}$$

NOTE $\hat{z}(t)$ estime l'intensité de défaillance à l'instant t pris dans la plage représentée par les données. Des estimations «extrapolées» pour un instant futur t peuvent être obtenues de manière similaire, mais il convient d'utiliser cette méthode avec les précautions habituelles associées à l'extrapolation.

Étape 5: Soit N défaillances observées dont la dernière est intervenue à t_N , le temps médian jusqu'à la $(N+1)^{\text{ième}}$ défaillance peut être estimé par la formule:

$$\hat{T}_{N+1} = t_N \exp \left[\frac{\frac{-1}{0,5 \frac{N+1}{N-1} - 1}}{N\hat{\beta} / (N-1)} \right] \quad (\text{censure par le temps})$$

$$\hat{T}_{N+1} = t_N \exp \left[\frac{\frac{-1}{0,5 \frac{N+1}{N-2} - 1}}{N\hat{\beta} / (N-2)} \right] \quad (\text{censure par une défaillance})$$

Step 2: Calculate the (unbiased) estimate of the shape parameter β from the formula:

$$\hat{\beta} = \frac{N-1}{S_1} \quad (\text{time terminated})$$

$$\hat{\beta} = \frac{N-2}{S_2} \quad (\text{failure terminated})$$

Step 3: Calculate the estimate of the scale parameter λ from the formula:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{k(T^*)^{\hat{\beta}}} \quad (\text{time terminated})$$

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{(t_N)^{\hat{\beta}}} \quad (\text{failure terminated})$$

Step 4: Calculate the estimate of the failure intensity $z(t)$, for any time $t > 0$, from the formula:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda} \hat{\beta} t^{\hat{\beta}-1}$$

NOTE $\hat{z}(t)$ estimates the current failure intensity for t over the range represented by the data. "Extrapolated" estimates for a future t may be obtained similarly, but should be used with the usual caution associated with extrapolation.

Step 5: Given N observed failures the last of which occurred at t_N , the median time to the $(N+1)$ th failure can be estimated from the formula:

$$\hat{T}_{N+1} = t_N \exp \left[\frac{\frac{-1}{0,5^{\frac{1}{N+1}} - 1}}{N\hat{\beta} / (N-1)} \right] \quad (\text{time termination})$$

$$\hat{T}_{N+1} = t_N \exp \left[\frac{\frac{-1}{0,5^{\frac{1}{N+1}} - 1}}{N\hat{\beta} / (N-2)} \right] \quad (\text{failure termination})$$

7.2.2 Cas 1c) – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte

Cette méthode s'applique seulement lorsque le temps de défaillance a été consigné pour chaque défaillance comme cela est décrit en 6.1.3.

Étape 1: Rassembler les données en temps de fonctionnement jusqu'à la défaillance, t_i , $i=1,2,...,N$, où N est le nombre total de défaillances sur k copies et T_j , $j=1,2,...,k$, est la fin de la période d'observation pour la $j^{\text{ième}}$ copie.

Étape 2: L'estimateur de maximum de vraisemblance du paramètre de forme β est la valeur de $\hat{\beta}$ qui satisfait à l'équation:

$$\frac{N}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^N \ln t_i - \frac{N \sum_{j=1}^k T_j^{\hat{\beta}} \ln T_j}{\sum_{j=1}^k T_j^{\hat{\beta}}} = 0$$

Il faut utiliser une méthode itérative pour résoudre l'équation pour $\hat{\beta}$.

Étape 3: Calculer l'estimation du paramètre d'échelle λ à partir de la formule:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{\sum_{j=1}^k T_j^{\hat{\beta}}}$$

Étape 4: Calculer l'estimation de l'intensité de défaillance $z(t)$, pour tout temps $t > 0$, à partir de la formule:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda} \hat{\beta} t^{\hat{\beta}-1}$$

NOTE $\hat{z}(t)$ donne une estimation de l'intensité de défaillance à l'instant t pris dans la plage représentée par les données. Des estimations «extrapolées» pour un temps futur t peuvent être obtenues de manière similaire, mais il convient de les utiliser avec les précautions habituelles associées aux extrapolations.

7.2.3 Cas 2 – Données temporelles pour les groupes de défaillances à prendre en compte

Cette méthode s'applique lorsque l'ensemble des données se compose d'intervalles de temps connus, chacun contenant un nombre connu de défaillances, comme cela est décrit en 6.2.

Étape 1: Rassembler dans un fichier de données le nombre de défaillances N_i à prendre en compte enregistrées dans le $i^{\text{ième}}$ intervalle $[t(i-1), t(i)]$, $i=1,2,...,d$. Le nombre total de défaillances à prendre en compte est

$$N = \sum_{i=1}^d N_i$$

7.2.2 Case 1c) – Time data for every relevant failure

This method applies only when the time of failure has been logged for every failure as described in 6.1.3.

Step 1: Assemble the data into the operating times to failure, t_i , $i=1,2,...,N$, where N is the total number of failures over the k copies and T_j , $j=1,2,...,k$, is the end of the observation period for the j th copy.

Step 2: The maximum likelihood estimate of the shape parameter β is the value of $\hat{\beta}$ which satisfies the equation:

$$\frac{N}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^N \ln t_i - \frac{N \sum_{j=1}^k T_j^{\hat{\beta}} \ln T_j}{\sum_{j=1}^k T_j^{\hat{\beta}}} = 0$$

An iterative method has to be used to solve the equation for $\hat{\beta}$.

Step 3: Calculate the estimate of the scale parameter λ from the formula:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{\sum_{j=1}^k T_j^{\hat{\beta}}}$$

Step 4: Calculate the estimate of the failure intensity $z(t)$, for any time $t > 0$, from the formula:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda} \hat{\beta} t^{\hat{\beta}-1}$$

NOTE $\hat{z}(t)$ estimates the current failure intensity for t over the range represented by the data. "Extrapolated" estimates for a future t may be obtained similarly, but should be used with the usual caution associated with extrapolation.

7.2.3 Case 2 – Time data for groups of relevant failures

This method applies when the data set consists of known time intervals, each containing a known number of failures as described in 6.2.

Step 1: Assemble into a data set the number of relevant failures N_i recorded in the i th interval $[t(i-1), t(i)]$, $i = 1, 2, ..., d$. The total number of relevant failures is

$$N = \sum_{i=1}^d N_i$$

Étape 2: L'estimateur de maximum de vraisemblance du paramètre de forme β est la valeur de $\hat{\beta}$ qui satisfait à l'équation:

$$\sum_{i=1}^d N_i \left[\frac{[t(i)]^{\hat{\beta}} \ln t(i) - [t(i-1)]^{\hat{\beta}} \ln t(i-1)}{[t(i)]^{\hat{\beta}} - [t(i-1)]^{\hat{\beta}}} - \ln t(d) \right] = 0$$

Noter que $[t(0)]^{\hat{\beta}} = 0$ et $[t(0)]^{\hat{\beta}} \ln t(0) = 0$. Il est possible que tous les termes $t(.)$ soient normalisées par rapport à $t(d)$ et alors le terme final $\ln t(d)$ disparaît. Il faut utiliser une méthode itérative pour résoudre l'équation pour $\hat{\beta}$.

Étape 3: Calculer l'estimation du paramètre d'échelle λ à partir de la formule:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{t(d)^{\hat{\beta}}}$$

Étape 4: Calculer l'estimation de l'intensité de défaillance $z(t)$, pour tout temps d'essai $t > 0$, à partir de la formule:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda} \hat{\beta} t^{\hat{\beta}-1}$$

NOTE $\hat{z}(t)$ estime l'intensité de défaillance à l'instant t pris dans la plage représentée par les données. Des estimations «extrapolées» pour un temps futur t peuvent être obtenues de manière similaire, mais il convient d'utiliser cette méthode avec les précautions habituelles associées à l'extrapolation.

7.3 Tests d'adéquation

7.3.1 Cas 1 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte

7.3.1.1 Test de Cramer-von-Mises

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.1 ou de l'étape 2 de 7.2.2.

Étape 2: Calculer la statistique d'adéquation de Cramer-von-Mises donnée par la formule:

$$C^2 = \frac{1}{12M} + \sum_{j=1}^M \left[\left(\frac{t_j}{T} \right)^{\hat{\beta}} - \left(\frac{2j-1}{2M} \right) \right]^2$$

où

$M = N$ et $T = T^*$ (essai censuré par le temps)

$M = N - 1$ et $T = t_N$ (essai censuré par une défaillance)

Étape 3: Choisir la valeur critique $C_{0,90}^2(M)$ pour le test de Cramer-von-Mises correspondant à M dans le Tableau 1, qui donne les valeurs critiques avec un niveau de signification de 10 %.

Step 2: The maximum likelihood estimate of the shape parameter β is the value of $\hat{\beta}$ which satisfies the equation:

$$\sum_{i=1}^d N_i \left[\frac{[t(i)]^{\hat{\beta}} \ln t(i) - [t(i-1)]^{\hat{\beta}} \ln t(i-1)}{[t(i)]^{\hat{\beta}} - [t(i-1)]^{\hat{\beta}}} - \ln t(d) \right] = 0$$

Note that $[t(0)]^{\hat{\beta}} = 0$ and $[t(0)]^{\hat{\beta}} \ln t(0) = 0$. All $t(\cdot)$ terms may be normalized with respect to $t(d)$ and then the final term $\ln t(d)$ disappears. An iterative method has to be used to solve the equation for $\hat{\beta}$.

Step 3: Calculate the estimate of the scale parameter λ from the formula:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{t(d)^{\hat{\beta}}}$$

Step 4: Calculate the estimate of the failure intensity $z(t)$, for any test time $t > 0$, from the formula:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda} \hat{\beta} t^{\hat{\beta}-1}$$

NOTE $\hat{z}(t)$ estimates the current failure intensity for t over the range represented by the data. "Extrapolated" estimates for a future t may be obtained similarly, but should be used with the usual caution associated with extrapolation.

7.3 Goodness-of-fit tests

7.3.1 Case 1 – Time data for every relevant failure

7.3.1.1 Cramer-von-Mises test

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.1 or step 2 in 7.2.2.

Step 2: Calculate the Cramer-von-Mises goodness-of-fit test statistic given by the formula:

$$C^2 = \frac{1}{12M} + \sum_{j=1}^M \left[\left(\frac{t_j}{T} \right)^{\hat{\beta}} - \left(\frac{2j-1}{2M} \right) \right]^2$$

where

$M = N$ and $T = T^*$ (time terminated)

$M = N - 1$ and $T = t_N$ (failure terminated)

Step 3: Select the critical value $C_{0.90}^2(M)$ for the Cramer-von-Mises test corresponding to M from Table 1, which gives critical values at a 10 % significance level.

Étape 4: si:

$$C^2 > C_{0,90}^2(M)$$

on rejette alors l'hypothèse selon laquelle le modèle de loi en puissance décrit les données de manière adéquate. Sinon, on conclut que le modèle de loi en puissance décrit les données de manière adéquate.

7.3.1.2 Procédure graphique

Lorsque les instants de défaillance sont connus, la procédure graphique décrite ci-dessous peut être utilisée pour obtenir des informations complémentaires concernant la correspondance entre le modèle et les données. Le procédé consiste à représenter l'espérance mathématique du temps jusqu'à la $j^{\text{ème}}$ défaillance, $E(t_j)$, en fonction du temps observé jusqu'à la $j^{\text{ème}}$ défaillance. D'autres détails concernant l'approche sont donnés à l'annexe A.

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.1 et $\hat{\lambda}$ à partir de l'étape 3 de 7.2.1.

Étape 2: Calculer un estimateur de l'espérance mathématique du temps jusqu'à la $j^{\text{ème}}$ défaillance, $j=1,2,\dots,N$, à partir de la formule:

$$\hat{E}(t_j) = \left(\frac{j}{\hat{\lambda}} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$$

Étape 3: Représenter $\hat{E}(t_j)$ en fonction de t_j sur des échelles linéaires identiques. La vérification visuelle de la disposition de ces points sur une ligne à 45° passant par l'origine est une mesure subjective de l'applicabilité du modèle.

7.3.2 Cas 2 – Données temporelles pour les groupes de défaillances à prendre en compte

7.3.2.1 Test de Chi-deux

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.3 et $\hat{\lambda}$ à partir de l'étape 3 de 7.2.3.

Étape 2: Calculer l'espérance mathématique du nombre de défaillances dans l'intervalle de temps $[t(i-1), t(i)]$ qui est donnée, en valeur approchée par:

$$e_i = \hat{\lambda} \left\{ [t(i)]^{\hat{\beta}} - [t(i-1)]^{\hat{\beta}} \right\}$$

Étape 3: Pour chaque intervalle, e_i ne doit pas être inférieur à 5, et si nécessaire, il est recommandé de combiner les intervalles adjacents avant l'essai. Pour d intervalles (après combinaison si nécessaire) et avec N_i identique à 7.2.3, calculer la statistique:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^d \frac{(N_i - e_i)^2}{e_i}$$

Step 4: If:

$$C^2 > C_{0,90}^2(M)$$

then the hypothesis that the power law model fits the data is rejected. Otherwise, conclude that the power law model fits the data.

7.3.1.2 Graphical procedure

When the failure times are known, the graphical procedure described below may be used to obtain additional information about the correspondence between the model and the data. This involves plotting the expected time to the j th failure, $E(t_j)$, against the observed time to the j th failure. Further details about the approach are given in annex A.

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.1 and $\hat{\lambda}$ from step 3 in 7.2.1.

Step 2: Calculate the estimate of the expected time to the j th failure, $j=1,2,\dots,N$, from the formula:

$$\hat{E}(t_j) = \left(\frac{j}{\hat{\lambda}} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$$

Step 3: Plot $\hat{E}(t_j)$ against t_j on identical linear scales. The visual agreement of these points with a line of 45° through the origin is a subjective measure of the applicability of the model.

7.3.2 Case 2 – Time data for groups of relevant failures

7.3.2.1 Chi-square test

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.3 and $\hat{\lambda}$ from step 3 in 7.2.3.

Step 2: Calculate the expected number of failures in the time interval $[t(i-1), t(i)]$ which is approximated by:

$$e_i = \hat{\lambda} \left\{ [t(i)]^{\hat{\beta}} - [t(i-1)]^{\hat{\beta}} \right\}$$

Step 3: For each interval, e_i shall not be less than 5, and if necessary, adjacent intervals should be combined before the test. For d intervals (after combination if necessary) and with N_i the same as in 7.2.3, calculate the statistic:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^d \frac{(N_i - e_i)^2}{e_i}$$

Étape 4: Choisir la valeur critique d'une distribution χ^2 à $(d - 2)$ degrés de liberté et un niveau de signification de 10 % dans le Tableau 2, c'est-à-dire $\chi_{0,90}^2(d - 2)$.

Étape 5: Si la statistique du test χ^2 dépasse la valeur critique $\chi_{0,90}^2(d - 2)$ alors on rejette l'hypothèse selon laquelle le modèle en puissance décrit les données de manière adéquate. Sinon, on conclut que le modèle de loi en puissance décrit les données de manière adéquate.

NOTE Le test de Khi-deux est un test par échantillonnage étendu et il est donc nécessaire de disposer d'ensembles de données importants pour détecter les déviations du modèle de loi en puissance qui ont une importance pratique.

7.3.2.2 Procédure graphique

Lorsque les données sont constituées d'intervalles de temps connus, chacun contenant un nombre connu de défaillances, la procédure graphique décrite ci-dessous peut être utilisée pour obtenir des informations complémentaires sur la correspondance entre le modèle et les données. Le procédé consiste à représenter l'espérance mathématique du nombre de défaillances en fonction du nombre de défaillances observé à chaque point final. D'autres précisions concernant cette approche sont données à l'annexe A.

Étape 1: Pour chaque point final $t(i)$, calculer le nombre de défaillances observé de 0 à $t(i)$ à partir de la formule:

$$N[t(i)] = \sum_{j=1}^i N_j.$$

Étape 2: Calculer un estimateur de l'espérance mathématique $E[N[t(i)]]$ du nombre de défaillances correspondant à partir de la formule:

$$\hat{E}[N[t(i)]] = \hat{\lambda}_t(i)^{\hat{\beta}}$$

Étape 3: Représenter $\hat{E}[N[t(i)]]$ en fonction de $N[t(i)]$ sur des échelles linéaires identiques. La vérification visuelle de la disposition de ces points sur une ligne à 45° passant par l'origine est une mesure subjective de l'applicabilité du modèle.

7.4 Intervalles de confiance pour le paramètre de forme

7.4.1 Cas 1 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte

Dans le modèle de loi en puissance, le paramètre de forme β détermine si l'intensité de défaillance change dans le temps. Si $0 < \beta < 1$ il y a une intensité de défaillance décroissante; si $\beta = 1$ il y a une intensité de défaillance constante; si $\beta > 1$ il y a une intensité de défaillance croissante.

Afin de déterminer un intervalle de confiance bilatéral pour β lorsque les temps de défaillance individuels sont disponibles, suivre l'une des étapes ci-dessous, selon celle qui est appropriée pour les données censurées par le temps ou par une défaillance.

Intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β – Données censurées par le temps

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.1 ou de l'étape 2 de 7.2.2.

Step 4: Select the critical value from a χ^2 distribution with $(d - 2)$ degrees of freedom and a 10 % significance level from Table 2, i.e. $\chi_{0,90}^2(d - 2)$.

Step 5: If the test statistic χ^2 exceeds the critical value $\chi_{0,90}^2(d - 2)$ then reject the hypothesis that the power law model adequately fits the grouped data. Otherwise, conclude the power law model fits the data.

NOTE The Chi-square test is a large-sample test and so will need large data sets to detect deviations from the power law model that are practically important.

7.3.2.2 Graphical procedure

When the data set consists of known time intervals, each containing a known number of failures, the graphical procedure described below may be used to obtain additional information about the correspondence between the model and the data. This involves plotting the expected number of failures against those observed at each endpoint. Further details of the approach are given in annex A.

Step 1: For each endpoint $t(i)$, calculate the observed number of failures from 0 to $t(i)$ from the formula:

$$N[t(i)] = \sum_{j=1}^i N_j$$

Step 2: Calculate the estimate of the corresponding expected number of failures $E[N[t(i)]]$ from the formula:

$$\hat{E}[N[t(i)]] = \hat{\lambda} t(i)^{\hat{\beta}}$$

Step 3: Plot $\hat{E}[N[t(i)]]$ against $N[t(i)]$ on identical linear scales. The visual agreement of these points with a line of 45° through the origin is a subjective measure of the applicability of the model.

7.4 Confidence intervals for the shape parameter

7.4.1 Case 1 – Time data for every relevant failure

The shape parameter β in the power law model determines if the failure intensity changes with time. If $0 < \beta < 1$ there is decreasing failure intensity; if $\beta = 1$ there is a constant failure intensity; if $\beta > 1$ there is an increasing failure intensity.

For a two-sided confidence interval for β when individual failure times are available, follow the steps below as appropriate for time and failure terminated data.

Two-sided 90 % confidence interval for β – Time terminated data

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.1 or from step 2 in 7.2.2.

Étape 2: Calculer:

$$D_L = \frac{\chi_{0,05}^2(2N)}{2(N-1)}$$

$$D_U = \frac{\chi_{0,95}^2(2N)}{2(N-1)}$$

où les fractiles de la distribution χ^2 sont donnés au Tableau 2.

Étape 3: Calculer la limite inférieure de confiance pour β à partir de la formule:

$$\beta_{LB} = D_L \hat{\beta}$$

et la limite supérieure de confiance pour β à partir de la formule:

$$\beta_{UB} = D_U \hat{\beta}$$

Étape 4: L'intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β est donné par (β_{LB}, β_{UB}) .

NOTE Les limites inférieure et supérieure unilatérales à 95 % pour β sont β_{LB} et β_{UB} respectivement.

Intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β – Données censurées par une défaillance

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.1.

Étape 2: Calculer:

$$D_L = \frac{\chi_{0,05}^2(2(N-1))}{2(N-2)}$$

$$D_U = \frac{\chi_{0,95}^2(2(N-1))}{2(N-2)}$$

où les fractiles de la distribution χ^2 sont donnés au Tableau 2.

Étape 3: Calculer la limite inférieure de confiance pour β à partir de la formule:

$$\beta_{LB} = D_L \hat{\beta}$$

et la limite supérieure de confiance pour β à partir de la formule:

$$\beta_{UB} = D_U \hat{\beta}$$

Step 2: Calculate:

$$D_L = \frac{\chi_{0,05}^2(2N)}{2(N-1)}$$

$$D_U = \frac{\chi_{0,95}^2(2N)}{2(N-1)}$$

where the fractiles of the χ^2 distribution are given in Table 2.

Step 3: Calculate the lower confidence limit for β from the formula:

$$\beta_{LB} = D_L \hat{\beta}$$

and the upper confidence limit for β from the formula:

$$\beta_{UB} = D_U \hat{\beta}$$

Step 4: The two-sided 90 % confidence interval for β is given by (β_{LB}, β_{UB}) .

NOTE One-sided 95 % lower and upper limits for β are β_{LB} and β_{UB} respectively.

Two-sided 90 % confidence interval for β – Failure terminated data

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.1.

Step 2: Calculate:

$$D_L = \frac{\chi_{0,05}^2(2(N-1))}{2(N-2)}$$

$$D_U = \frac{\chi_{0,95}^2(2(N-1))}{2(N-2)}$$

where the fractiles of the χ^2 distribution are given in Table 2.

Step 3: Calculate the lower confidence limit for β from the formula:

$$\beta_{LB} = D_L \hat{\beta}$$

and the upper confidence limit for β from the formula:

$$\beta_{UB} = D_U \hat{\beta}$$

Étape 4: L'intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β est donné par (β_{LB}, β_{UB}) .

NOTE Les limites inférieure et supérieure unilatérales à 95 % pour β sont β_{LB} et β_{UB} respectivement.

7.4.2 Cas 2 – Données temporelles pour les groupes de défaillances à prendre en compte

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.3.

Étape 2: Calculer:

$$P(i) = \frac{t(i)}{t(d)} \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, \dots, d$$

Étape 3: Calculer l'expression:

$$A = \sum_{i=1}^d \frac{\left[[P(i)]^{\hat{\beta}} \ln[P(i)]^{\hat{\beta}} - [P(i-1)]^{\hat{\beta}} \ln[P(i-1)]^{\hat{\beta}} \right]^2}{\left[[P(i)]^{\hat{\beta}} - [P(i-1)]^{\hat{\beta}} \right]}$$

Étape 4: Calculer:

$$C = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Étape 5: Pour un intervalle de confiance bilatéral approximatif de 90 % pour β , calculer:

$$S = \frac{164C}{\sqrt{N}}$$

où N est le nombre total de défaillances.

Étape 6: Calculer la limite inférieure de confiance pour β à partir de la formule:

$$\beta_{LB} = \hat{\beta}(1 - S)$$

et la limite supérieure de confiance pour β à partir de la formule:

$$\beta_{UB} = \hat{\beta}(1 + S)$$

Étape 7: L'intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β est donné par (β_{LB}, β_{UB}) .

NOTE Les limites inférieure et supérieure unilatérales à 95 % pour β sont β_{LB} et β_{UB} respectivement.

Step 4: The two-sided 90 % confidence interval for β is given by (β_{LB}, β_{UB}) .

NOTE One-sided 95 % lower and upper limits for β are β_{LB} and β_{UB} respectively.

7.4.2 Case 2 – Time data for groups of relevant failures

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.3.

Step 2: Calculate:

$$P(i) = \frac{t(i)}{t(d)} \quad \text{with} \quad i = 1, 2, \dots, d$$

Step 3: Calculate the expression:

$$A = \sum_{i=1}^d \frac{\left[[P(i)]^{\hat{\beta}} \ln[P(i)]^{\hat{\beta}} - [P(i-1)]^{\hat{\beta}} \ln[P(i-1)]^{\hat{\beta}} \right]^2}{\left[[P(i)]^{\hat{\beta}} - [P(i-1)]^{\hat{\beta}} \right]}$$

Step 4: Calculate:

$$C = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Step 5: For an approximate two-sided 90 % confidence interval for β , calculate:

$$S = \frac{164C}{\sqrt{N}}$$

where N is the total number of failures.

Step 6: Calculate the lower confidence limit for β from the formula:

$$\beta_{LB} = \hat{\beta}(1-S)$$

and the upper confidence limit for β from the formula:

$$\beta_{UB} = \hat{\beta}(1+S)$$

Step 7: The two-sided 90 % confidence interval for β is given by (β_{LB}, β_{UB}) .

NOTE One-sided 95 % lower and upper limits for β are β_{LB} and β_{UB} respectively.

7.5 Intervalles de confiance pour l'intensité de défaillance

7.5.1 Cas 1 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte

Étape 1: Calculer $\hat{z}(t)$ à partir de l'étape 4 de 7.2.1 ou de l'étape 4 de 7.2.2.

Étape 2: Pour un intervalle de confiance bilatéral à 90 %, se référer au Tableau 3 (*essai censuré par le temps*) et au Tableau 4 (*essai censuré par une défaillance*) et repérer les valeurs de L et U pour la taille d'échantillon appropriée N .

Étape 3: Calculer la limite inférieure de confiance pour $z(t)$ à partir de la formule:

$$z_{LB} = \frac{\hat{z}(t)}{U}$$

et la limite supérieure de confiance pour $z(t)$ à partir de la formule:

$$z_{UB} = \frac{\hat{z}(t)}{L}$$

Étape 4: L'intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour $z(t)$ est donné par (z_{LB}, z_{UB}) .

NOTE Les limites inférieure et supérieure unilatérales à 95 % pour $z(t)$ sont z_{LB} et z_{UB} respectivement.

7.5.2 Cas 2 – Données temporelles pour les groupes des défaillances à prendre en compte

Étape 1: Calculer $\hat{z}(t)$ à partir de l'étape 4 de 7.2.3.

Étape 2: Calculer:

$$P(i) = \frac{t(i)}{t(d)} \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, d$$

Étape 3: Calculer:

$$A = \sum_{i=1}^d \frac{\left[[P(i)]^{\hat{\beta}} \ln[P(i)]^{\hat{\beta}} - [P(i-1)]^{\hat{\beta}} \ln[P(i-1)]^{\hat{\beta}} \right]^2}{[P(i)]^{\hat{\beta}} - [P(i-1)]^{\hat{\beta}}}$$

Étape 4: Calculer:

$$D = \sqrt{\frac{1}{A} + 1}$$

7.5 Confidence intervals for the failure intensity

7.5.1 Case 1 – Time data for every relevant failure

Step 1: Calculate $\hat{z}(t)$ from step 4 in 7.2.1 or step 4 in 7.2.2.

Step 2: For a two-sided 90 % confidence interval refer to Table 3 (*time terminated*) and Table 4 (*failure terminated*) and locate values of L and U for the appropriate sample size N .

Step 3: Calculate the lower confidence limit for $z(t)$ from the formula:

$$z_{LB} = \frac{\hat{z}(t)}{U}$$

and the upper confidence limit for $z(t)$ from the formula:

$$z_{UB} = \frac{\hat{z}(t)}{L}$$

Step 4: The two-sided 90 % confidence interval for $z(t)$ is given by (z_{LB}, z_{UB}) .

NOTE One-sided 95 % lower and upper limits for $z(t)$ are z_{LB} and z_{UB} respectively.

7.5.2 Case 2 – Time data for groups of relevant failures

Step 1: Calculate $\hat{z}(t)$ from step 4 in 7.2.3.

Step 2: Calculate:

$$P(i) = \frac{t(i)}{t(d)} \quad \text{with } i = 1, 2, \dots, d$$

Step 3: Calculate:

$$A = \sum_{i=1}^d \frac{\left[[P(i)]^{\hat{\beta}} \ln[P(i)]^{\hat{\beta}} - [P(i-1)]^{\hat{\beta}} \ln[P(i-1)]^{\hat{\beta}} \right]^2}{\left[[P(i)]^{\hat{\beta}} - [P(i-1)]^{\hat{\beta}} \right]}$$

Step 4: Calculate:

$$D = \sqrt{\frac{1}{A} + 1}$$

Étape 5: Pour un intervalle de confiance bilatéral approximatif de 90 % pour $z(t)$ calculer:

$$S = \frac{164D}{\sqrt{N}}$$

où N est le nombre total de défaillances cumulées.

Étape 6: La limite inférieure de confiance pour $z(t)$ est donnée par:

$$z_{LB} = \frac{\hat{z}(t)}{1+S}$$

et la limite supérieure de confiance pour $z(t)$ est donnée par:

$$z_{UB} = \frac{\hat{z}(t)}{1-S}$$

Étape 7: L'intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour $z(t)$ est donné par (z_{LB}, z_{UB}) .

NOTE Les limites inférieure et supérieure unilatérales à 95 % pour $z(t)$ sont z_{LB} et z_{UB} respectivement.

7.6 Intervalles de prédiction pour les durées jusqu'aux défaillances futures d'une entité unique

7.6.1 Intervalle de prédiction pour les durées jusqu'à la prochaine défaillance pour cas 1 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte

Pour un intervalle de prédiction bilatéral à 90 % pour le temps jusqu'à la $(N+1)^{\text{ème}}$ défaillance T_{N+1} , c'est-à-dire la prochaine défaillance, si N défaillances sont intervenues aux temps $t_1, t_2, \dots, t_N$ suivre les étapes ci-dessous pour les données censurées par le temps et les données censurées par une défaillance.

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.1 ou de l'étape 2 de 7.2.2.

Étape 2: Calculer la limite inférieure de prédiction pour T_{N+1} à partir de la formule:

$$T_{1L} = t_N \exp \left[\frac{\frac{-1}{0,95^{\frac{1}{N-1}} - 1}}{\frac{N\hat{\beta}}{(N-1)}} \right] \quad (\text{données censurées par le temps})$$

$$T_{1L} = t_N \exp \left[\frac{\frac{-1}{0,95^{\frac{1}{N-1}} - 1}}{\frac{N\hat{\beta}}{(N-2)}} \right] \quad (\text{données censurées par une défaillance})$$

Step 5: For an approximate two-sided 90 % confidence interval for $z(t)$ calculate:

$$S = \frac{1,64D}{\sqrt{N}}$$

where N is the total number of failures accumulated.

Step 6: The lower confidence limit on $z(t)$ is given by:

$$z_{LB} = \frac{\hat{z}(t)}{1+S}$$

and the upper confidence limit on $z(t)$ is given by:

$$z_{UB} = \frac{\hat{z}(t)}{1-S}$$

Step 7: The two-sided 90 % confidence interval for $z(t)$ is given by (z_{LB}, z_{UB}) .

NOTE One-sided 95 % lower and upper limits for $z(t)$ are z_{LB} and z_{UB} respectively.

7.6 Prediction intervals for the length of time to future failures of a single item

7.6.1 Prediction interval for length of time to next failure for Case 1 – Time data for every relevant failure

For a two-sided 90 % prediction interval for the time to the $(N+1)$ th failure T_{N+1} , that is, the next future failure given that N failures have occurred at times $t_1, t_2, \dots, t_N$ follow the steps below as appropriate for time and failure terminated data.

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.1 or from step 2 in 7.2.2.

Step 2: Calculate the lower prediction limit for T_{N+1} from the formula:

$$T_{1L} = t_N \exp \left[\frac{\frac{-1}{0,95^{\frac{1}{N-1}} - 1}}{N\hat{\beta} / (N-1)} \right] \quad (\text{time terminated})$$

$$T_{1L} = t_N \exp \left[\frac{\frac{-1}{0,95^{\frac{1}{N-1}} - 1}}{N\hat{\beta} / (N-2)} \right] \quad (\text{failure terminated})$$

et la limite supérieure de prédiction pour T_{N+1} à partir de la formule:

$$T_{1U} = t_N \exp \left[\frac{\frac{-1}{0,05^{N-1}} - 1}{N\hat{\beta} / (N-1)} \right] \quad (\text{données censurées par le temps})$$

$$T_{1U} = t_N \exp \left[\frac{\frac{-1}{0,05^{N-1}} - 1}{N\hat{\beta} / (N-2)} \right] \quad (\text{données censurées par une défaillance})$$

Étape 3: L'intervalle de prédiction bilatéral à 90 % pour T_{N+1} est donné par (T_{1L}, T_{1U}) .

NOTE Les limites inférieure et supérieure unilatérales à 95 % pour T_{N+1} sont T_{1L} et T_{1U} respectivement.

7.6.2 Intervalle de prédiction pour les durées jusqu'à la $R^{i\text{ème}}$ défaillance future pour le cas 1 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte

Pour un intervalle de prédiction bilatéral approximatif à 90 % pour le temps jusqu'à la $(R+N)^{\text{ième}}$ défaillance T_{N+R} , c'est-à-dire la $R^{\text{ième}}$ défaillance future, si N défaillances sont intervenues aux moments $t_1, t_2, \dots, t_N$ suivre les étapes ci-dessous pour les données censurées par une défaillance et les données censurées par le temps.

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.1 ou de l'étape 2 de 7.2.2.

Étape 2: Calculer:

$$G = \left[\frac{(N-0,5)(N+R-0,5)}{NR} \right] \ln \left[\frac{N+R-0,5}{N-0,5} \right]$$

Étape 3: Calculer:

$$V = 2NG \ln \left[\frac{N+R-0,5}{N-0,5} \right]$$

Étape 4: Calculer la limite inférieure de prédiction pour T_{N+R} à partir de la formule:

$$T_{RL} = t_N \exp \left[\frac{V(N-2)}{2N(N-1)G\hat{\beta} F_{0,95}(2(N-1)V')} \right] \quad (\text{données censurées par une défaillance})$$

$$T_{RL} = t_N \exp \left[\frac{V}{2NG\hat{\beta} F_{0,95}(2(N-1)V')} \right] \quad (\text{données censurées par le temps})$$

and the upper prediction limit for T_{N+1} from the formula:

$$T_{1U} = t_N \exp \left[\frac{0,05^{\frac{-1}{N-1}} - 1}{N\hat{\beta} / (N-1)} \right] \quad (\text{time terminated})$$

$$T_{1U} = t_N \exp \left[\frac{0,05^{\frac{-1}{N-1}} - 1}{N\hat{\beta} / (N-2)} \right] \quad (\text{failure terminated})$$

Step 3: The two-sided 90 % prediction interval for T_{N+1} is given by (T_{1L}, T_{1U}) .

NOTE One-sided 95 % lower and upper limits for T_{N+1} are T_{1L} and T_{1U} respectively.

7.6.2 Prediction Interval for length of time to R th future failure for Case 1 – Time data for every relevant failure

For an approximate two-sided 90 % prediction interval for the time to the $(R+N)$ th failure T_{N+R} , that is, the R th future failure given that N failures have occurred at times $t_1, t_2, \dots, t_N$ follow the steps below as appropriate for failure and time terminated data.

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.1 or from step 2 in 7.2.2.

Step 2: Calculate:

$$G = \left[\frac{(N-0,5)(N+R-0,5)}{NR} \right] \ln \left[\frac{N+R-0,5}{N-0,5} \right]$$

Step 3: Calculate:

$$V = 2NG \ln \left[\frac{N+R-0,5}{N-0,5} \right]$$

Step 4: Calculate the lower prediction limit for T_{N+R} from the formula:

$$T_{RL} = t_N \exp \left[\frac{V(N-2)}{2N(N-1)G\hat{\beta} F_{0,95}(2(N-1), V')} \right] \quad (\text{failure terminated})$$

$$T_{RL} = t_N \exp \left[\frac{V}{2NG\hat{\beta} F_{0,95}(2(N-1), V')} \right] \quad (\text{time terminated})$$

et la limite supérieure de prédiction pour T_{N+R} à partir de la formule:

$$T_{RU} = t_N \exp \left[\frac{V(N-2)F_{0,95}(V', 2(N-1))}{2N(N-1)G\hat{\beta}} \right] \quad (\text{données censurées par une défaillance})$$

$$T_{RU} = t_N \exp \left[\frac{VF_{0,95}(V', 2(N-1))}{2NG\hat{\beta}} \right] \quad (\text{données censurées par le temps})$$

où les fractiles de la distribution F sont donnés dans le Tableau 5 et V est la valeur entière arrondie de V .

Étape 5: L'intervalle de prédiction bilatéral à 90 % pour T_{N+R} est donné par (T_{RL}, T_{RU}) .

NOTE Les limites unilatérales inférieure et supérieure à 95 % pour T_{N+R} sont T_{RL} et T_{RU} respectivement.

7.7 Test d'égalité des paramètres de forme $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$

7.7.1 Cas 3 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte pour deux entités de populations différentes

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}_1$ pour l'entité 1 et $\hat{\beta}_2$ pour l'entité 2 à partir de l'étape 2 de 7.2.1.

Étape 2: Calculer:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N_1-1} \ln \left[\frac{t_{N_1}}{t_{i1}} \right]$$

et

$$S_2 = \sum_{i=1}^{N_2-1} \ln \left[\frac{t_{N_2}}{t_{i2}} \right]$$

Étape 3: Calculer:

$$F = \frac{S_1(N_2-1)}{S_2(N_1-1)}$$

Étape 4: Si

$$\frac{1}{F_{0,95}(2(N_2-1), 2(N_1-1))} < F < F_{0,95}(2(N_1-1), 2(N_2-1))$$

où les fractiles de la distribution F sont donnés au Tableau 5, alors l'hypothèse nulle selon laquelle les valeurs β sont les mêmes ne peut être rejetée au niveau de signification de 10 %. Sinon conclure que les paramètres de forme des modèles adaptés aux données pour les deux entités sont statistiquement différentes.

and the upper prediction limit for T_{N+R} from the formula:

$$T_{RU} = t_N \exp \left[\frac{V(N-2)F_{0,95}(V', 2(N-1))}{2N(N-1)G\hat{\beta}} \right] \quad (\text{failure terminated})$$

$$T_{RU} = t_N \exp \left[\frac{VF_{0,95}(V', 2(N-1))}{2NG\hat{\beta}} \right] \quad (\text{time terminated})$$

where the fractiles of the F distribution are given in Table 5 and V' is the rounded integer value of V .

Step 5: The two-sided 90 % prediction interval for T_{N+R} is given by (T_{RL}, T_{RU}) .

NOTE One-sided 95 % lower and upper limits for T_{N+R} are T_{RL} and T_{RU} respectively.

7.7 Test for the equality of the shape parameters $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$

7.7.1 Case 3 – Time data for every relevant failure for two items from different populations

Step 1: Calculate $\hat{\beta}_1$ for item 1 and $\hat{\beta}_2$ for item 2 from step 2 in 7.2.1.

Step 2: Calculate:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N_1-1} \ln \left[\frac{t_{N_1}}{t_{i1}} \right]$$

and

$$S_2 = \sum_{i=1}^{N_2-1} \ln \left[\frac{t_{N_2}}{t_{i2}} \right]$$

Step 3: Calculate:

$$F = \frac{S_1(N_2-1)}{S_2(N_1-1)}$$

Step 4: If

$$\frac{1}{F_{0,95}(2(N_2-1), 2(N_1-1))} < F < F_{0,95}(2(N_1-1), 2(N_2-1))$$

where the fractiles of the F distribution are given in Table 5, then the null hypothesis that the β values are the same cannot be rejected at the 10 % significance level. Otherwise, conclude that the shape parameters of the models fitted to the data for the two items are statistically different.

7.7.2 Cas 3 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte pour plus de deux entités de populations différentes

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}_j$ pour l'entité j , $j = 1, 2, \dots, k$ à partir de l'étape 2 de 7.2.1.

Étape 2: Calculer:

$$S_j = \sum_{i=1}^{N_j-1} \ln \left[\frac{t_{N_j}}{t_{ij}} \right]$$

Étape 3: Calculer:

$$N = \sum_{j=1}^{N_j-1} N_j$$

Étape 4: Calculer:

$$W = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_{j=1}^k \frac{1}{2(N_j-1)} - \frac{1}{2(N-k)} \right]$$

Étape 5: Calculer:

$$Y = 2(N-k) \ln \left[\left(\frac{1}{N-k} \sum_{j=1}^k S_j \right) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{2(N_j-1)} \ln \left[\frac{S_j}{N_j-1} \right] \right]$$

Étape 6: Si

$$\frac{Y}{W} < \chi_{0,90}^2(k-1)$$

où les fractiles de la distribution χ^2 sont donnés au Tableau 2, alors l'hypothèse nulle selon laquelle les valeurs β sont les mêmes ne peut pas être rejetée à un niveau de signification de 10 %. Sinon, conclure que les paramètres de forme des modèles adaptés aux entités différentes sont statistiquement différents.

7.7.2 Case 3 – Time data for every relevant failure for three or more items from different populations

Step 1: Calculate $\hat{\beta}_j$ for item j , $j = 1, 2, \dots, k$ from step 2 in 7.2.1.

Step 2: Calculate:

$$S_j = \sum_{i=1}^{N_j-1} \ln \left[\frac{t_{N_j}}{t_{ij}} \right]$$

Step 3: Calculate:

$$N = \sum_{j=1}^k N_j$$

Step 4: Calculate:

$$W = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_{j=1}^k \frac{1}{2(N_j-1)} - \frac{1}{2(N-k)} \right]$$

Step 5: Calculate:

$$Y = 2(N-k) \ln \left[\left(\frac{1}{N-k} \right) \sum_{j=1}^k S_j \right] - \sum_{j=1}^k 2(N_j-1) \ln \left[\frac{S_j}{N_j-1} \right]$$

Step 6: If

$$\frac{Y}{W} < \chi_{0,90}^2 (k-1)$$

where the fractiles of the χ^2 distribution are given in Table 2, then the null hypothesis that the β values are the same cannot be rejected at a 10 % significance level. Otherwise, conclude that the shape parameter of the models fitted to the different items is statistically different.

Tableau 1 – Valeurs critiques pour le test d'adéquation de Cramer-von-Mises avec un niveau de signification de 10 %

M	Valeur critique de la statistique $C_{0,90}^2(M)$
3	0,154
4	0,155
5	0,160
6	0,162
7	0,165
8	0,165
9	0,167
10	0,167
11	0,169
12	0,169
13	0,169
14	0,169
15	0,169
16	0,171
17	0,171
18	0,171
19	0,171
20	0,172
30	0,172
≥60	0,173
NOTE 1 Pour les essais censurés par le temps, $M = N$.	
NOTE 2 Pour les essais censurés par une défaillance, $M = N - 1$.	

**Table 1 – Critical values for Cramer-von-Mises goodness-of-fit test
at 10 % level of significance**

M	Critical value of statistic
	$C_{0,90}^2(M)$
3	0,154
4	0,155
5	0,160
6	0,162
7	0,165
8	0,165
9	0,167
10	0,167
11	0,169
12	0,169
13	0,169
14	0,169
15	0,169
16	0,171
17	0,171
18	0,171
19	0,171
20	0,172
30	0,172
≥60	0,173
NOTE 1 For time terminated tests, $M = N$.	
NOTE 2 For failure terminated tests, $M = N-1$.	

Tableau 2 – Fractiles de la distribution de Khi-deux

Degrés de liberté ν	$\chi^2_{0,05}(\nu)$	$\chi^2_{0,90}(\nu)$	$\chi^2_{0,95}(\nu)$
2	0,10	4,61	5,99
4	0,71	7,78	9,49
6	1,64	10,65	12,59
8	2,73	13,36	15,51
10	3,94	15,98	18,31
12	5,23	18,55	21,03
14	6,57	21,06	23,69
16	7,96	23,54	26,30
18	9,39	25,99	28,87
20	10,85	28,41	31,41
22	12,34	30,81	33,92
24	13,85	33,20	36,42
26	15,38	35,56	38,89
28	16,92	37,92	41,34
30	18,49	40,26	43,77
32	20,09	42,57	46,17
34	21,70	44,88	48,57
36	23,30	47,19	50,96
38	24,91	49,50	53,36
40	26,51	51,81	55,76
42	28,16	54,08	58,11
50	34,76	63,17	67,51
52	36,45	65,42	69,82
60	43,19	74,40	79,08
62	44,90	76,63	81,37
70	51,74	85,53	90,53
72	53,47	87,74	92,80
80	60,39	96,58	101,88
82	62,14	98,78	104,13
90	69,13	107,57	113,15
92	70,89	109,76	115,39
100	77,93	118,50	124,34
102	79,70	120,68	126,57
110	86,79	129,38	135,48
112	88,57	131,56	137,70
120	95,71	140,23	146,57
122	97,49	142,40	148,78
200	168,28	226,02	233,99
z_p	-1,64	+1,28	+1,64

NOTE 1 L'interpolation linéaire est suffisamment précise pour les valeurs intermédiaires.

NOTE 2 Pour des valeurs supérieures de ν utiliser $\chi^2_p = \left[(z_p + \sqrt{2\nu - 1})^2 \right] / 2$ où z_p est le fractile correspondant de la loi normale réduite.

Table 2 – Fractiles of the Chi-square distribution

Degrees of freedom ν	$\chi^2_{0,05}(\nu)$	$\chi^2_{0,90}(\nu)$	$\chi^2_{0,95}(\nu)$
2	0,10	4,61	5,99
4	0,71	7,78	9,49
6	1,64	10,65	12,59
8	2,73	13,36	15,51
10	3,94	15,98	18,31
12	5,23	18,55	21,03
14	6,57	21,06	23,69
16	7,96	23,54	26,30
18	9,39	25,99	28,87
20	10,85	28,41	31,41
22	12,34	30,81	33,92
24	13,85	33,20	36,42
26	15,38	35,56	38,89
28	16,92	37,92	41,34
30	18,49	40,26	43,77
32	20,09	42,57	46,17
34	21,70	44,88	48,57
36	23,30	47,19	50,96
38	24,91	49,50	53,36
40	26,51	51,81	55,76
42	28,16	54,08	58,11
50	34,76	63,17	67,51
52	36,45	65,42	69,82
60	43,19	74,40	79,08
62	44,90	76,63	81,37
70	51,74	85,53	90,53
72	53,47	87,74	92,80
80	60,39	96,58	101,88
82	62,14	98,78	104,13
90	69,13	107,57	113,15
92	70,89	109,76	115,39
100	77,93	118,50	124,34
102	79,70	120,68	126,57
110	86,79	129,38	135,48
112	88,57	131,56	137,70
120	95,71	140,23	146,57
122	97,49	142,40	148,78
200	168,28	226,02	233,99
z_p	-1,64	+1,28	+1,64

NOTE 1 Linear interpolation of intermediate values is sufficiently accurate.

NOTE 2 For higher values of ν use $\chi^2_p = \left[(z_p + \sqrt{2\nu - 1})^2 \right] / 2$ where z_p is the corresponding fractile of the standard normal distribution.

Tableau 3 – Multiplicateurs pour les intervalles de confiance bilatéraux à 90 % pour la fonction d'intensité dans le cas de données censurées par le temps

<i>N</i>	<i>L</i>	<i>U</i>		<i>N</i>	<i>L</i>	<i>U</i>
3	0,175	6,490		21	0,570	1,738
4	0,234	4,460		22	0,578	1,714
5	0,281	3,613		23	0,586	1,692
6	0,320	3,136		24	0,593	1,672
7	0,353	2,826		25	0,600	1,653
8	0,381	2,608		26	0,606	1,635
9	0,406	2,444		27	0,612	1,619
10	0,428	2,317		28	0,618	1,604
11	0,447	2,214		29	0,623	1,590
12	0,464	2,130		30	0,629	1,576
13	0,480	2,060		35	0,652	1,520
14	0,494	1,999		40	0,672	1,477
15	0,508	1,947		45	0,689	1,443
16	0,521	1,902		50	0,703	1,414
17	0,531	1,861		60	0,726	1,369
18	0,543	1,825		70	0,745	1,336
19	0,552	1,793		80	0,759	1,311
20	0,561	1,765		100	0,783	1,273

NOTE 1 Pour *N* > 100

$$L \cong \frac{N-1}{N} \left(1 + 1,64 \sqrt{\frac{1}{2N}} \right)^{-2}$$

$$U \cong \frac{N-1}{N} \left(1 - 1,64 \sqrt{\frac{1}{2N}} \right)^{-2}$$

NOTE 2 L'interpolation linéaire est suffisamment précise pour les valeurs intermédiaires.

Table 3 – Multipliers for two-sided 90 % confidence intervals for intensity function for time terminated data

<i>N</i>	<i>L</i>	<i>U</i>		<i>N</i>	<i>L</i>	<i>U</i>
3	0,175	6,490		21	0,570	1,738
4	0,234	4,460		22	0,578	1,714
5	0,281	3,613		23	0,586	1,692
6	0,320	3,136		24	0,593	1,672
7	0,353	2,826		25	0,600	1,653
8	0,381	2,608		26	0,606	1,635
9	0,406	2,444		27	0,612	1,619
10	0,428	2,317		28	0,618	1,604
11	0,447	2,214		29	0,623	1,590
12	0,464	2,130		30	0,629	1,576
13	0,480	2,060		35	0,652	1,520
14	0,494	1,999		40	0,672	1,477
15	0,508	1,947		45	0,689	1,443
16	0,521	1,902		50	0,703	1,414
17	0,531	1,861		60	0,726	1,369
18	0,543	1,825		70	0,745	1,336
19	0,552	1,793		80	0,759	1,311
20	0,561	1,765		100	0,783	1,273

NOTE 1 For $N > 100$

$$L \cong \frac{N-1}{N} \left(1 + 164 \sqrt{\frac{1}{2N}} \right)^{-2}$$

$$U \cong \frac{N-1}{N} \left(1 - 164 \sqrt{\frac{1}{2N}} \right)^{-2}$$

NOTE 2 Linear interpolation of intermediate values is sufficiently accurate.

Tableau 4 – Multiplicateurs pour les intervalles de confiance bilatéraux à 90 % pour la fonction d'intensité dans le cas de données censurées par une défaillance

N	L	U		N	L	U
3	0,1712	4,746		21	0,6018	1,701
4	0,2587	3,825		22	0,6091	1,680
5	0,3174	3,254		23	0,6160	1,659
6	0,3614	2,892		24	0,6225	1,641
7	0,3962	2,644		25	0,6286	1,623
8	0,4251	2,463		26	0,6344	1,608
9	0,4495	2,324		27	0,6400	1,592
10	0,4706	2,216		28	0,6452	1,578
11	0,4891	2,127		29	0,6503	1,566
12	0,5055	2,053		30	0,6551	1,553
13	0,5203	1,991		35	0,6763	1,501
14	0,5337	1,937		40	0,6937	1,461
15	0,5459	1,891		45	0,7085	1,428
16	0,5571	1,876		50	0,7212	1,401
17	0,5674	1,814		60	0,7422	1,360
18	0,5769	1,781		70	0,7587	1,327
19	0,5857	1,752		80	0,7723	1,303
20	0,5940	1,726		100	0,7938	1,267

NOTE 1 Pour $N > 100$

$$L \cong \frac{N-2}{N} \left(1 + 1,64 \sqrt{\frac{2}{N}} \right)^{-1}$$

$$U \cong \frac{N-2}{N} \left(1 - 1,64 \sqrt{\frac{2}{N}} \right)^{-1}$$

NOTE 2 L'interpolation linéaire est suffisamment précise pour les valeurs intermédiaires.

Table 4 – Multipliers for two-sided 90 % confidence intervals for intensity function for failure terminated data

N	L	U		N	L	U
3	0,1712	4,746		21	0,6018	1,701
4	0,2587	3,825		22	0,6091	1,680
5	0,3174	3,254		23	0,6160	1,659
6	0,3614	2,892		24	0,6225	1,641
7	0,3962	2,644		25	0,6286	1,623
8	0,4251	2,463		26	0,6344	1,608
9	0,4495	2,324		27	0,6400	1,592
10	0,4706	2,216		28	0,6452	1,578
11	0,4891	2,127		29	0,6503	1,566
12	0,5055	2,053		30	0,6551	1,553
13	0,5203	1,991		35	0,6763	1,501
14	0,5337	1,937		40	0,6937	1,461
15	0,5459	1,891		45	0,7085	1,428
16	0,5571	1,876		50	0,7212	1,401
17	0,5674	1,814		60	0,7422	1,360
18	0,5769	1,781		70	0,7587	1,327
19	0,5857	1,752		80	0,7723	1,303
20	0,5940	1,726		100	0,7938	1,267

NOTE 1 For $N > 100$

$$L \cong \frac{N-2}{N} \left(1 + 1,64 \sqrt{\frac{2}{N}} \right)^{-1}$$

$$U \cong \frac{N-2}{N} \left(1 - 1,64 \sqrt{\frac{2}{N}} \right)^{-1}$$

NOTE 2 Linear interpolation of intermediate values is sufficiently accurate.

Tableau 5 – Fractiles 0,95 de la distribution F

$F_{0,95}(v_1, v_2)$	v_1										
v_2	2	4	6	8	10	20	30	40	60	120	∞
2	19,00	19,20	19,30	19,40	19,40	19,40	19,50	19,50	19,50	19,50	19,50
4	6,94	6,39	6,16	6,04	5,96	5,80	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
6	5,14	4,53	4,28	4,15	4,06	3,87	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
8	4,46	3,84	3,58	3,44	3,35	3,15	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
10	4,10	3,48	3,22	3,07	2,98	2,77	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
12	3,89	3,26	3,00	2,85	2,75	2,54	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
14	3,74	3,11	2,85	2,70	2,60	2,39	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
16	3,63	3,01	2,74	2,59	2,49	2,28	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
18	3,55	2,93	2,66	2,51	2,41	2,19	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
20	3,49	2,87	2,60	2,45	2,35	2,12	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
30	3,32	2,69	2,42	2,27	2,16	1,93	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	3,23	2,61	2,34	2,18	2,08	1,84	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	3,15	2,53	2,25	2,10	1,99	1,75	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,07	2,45	2,18	2,02	1,91	1,66	1,55	1,49	1,43	1,35	1,25
∞	3,00	2,37	2,10	1,94	1,83	1,57	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

NOTE L'interpolation linéaire est suffisamment précise pour les valeurs intermédiaires.

NOTE L'interpolation linéaire est suffisamment précise pour les valeurs intermédiaires.

Table 5 – 0,95 fractiles of the F distribution

$F_{0,95}(v_1, v_2)$	v_1										
v_2	2	4	6	8	10	20	30	40	60	120	∞
2	19,00	19,20	19,30	19,40	19,40	19,40	19,50	19,50	19,50	19,50	19,50
4	6,94	6,39	6,16	6,04	5,96	5,80	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
6	5,14	4,53	4,28	4,15	4,06	3,87	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
8	4,46	3,84	3,58	3,44	3,35	3,15	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
10	4,10	3,48	3,22	3,07	2,98	2,77	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
12	3,89	3,26	3,00	2,85	2,75	2,54	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
14	3,74	3,11	2,85	2,70	2,60	2,39	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
16	3,63	3,01	2,74	2,59	2,49	2,28	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
18	3,55	2,93	2,66	2,51	2,41	2,19	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
20	3,49	2,87	2,60	2,45	2,35	2,12	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
30	3,32	2,69	2,42	2,27	2,16	1,93	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	3,23	2,61	2,34	2,18	2,08	1,84	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	3,15	2,53	2,25	2,10	1,99	1,75	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,07	2,45	2,18	2,02	1,91	1,66	1,55	1,49	1,43	1,35	1,25
∞	3,00	2,37	2,10	1,94	1,83	1,57	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

NOTE Linear interpolation for intermediate values is sufficiently accurate.

NOTE Linear interpolation for intermediate values is sufficiently accurate.

Annexe A (informative)

Modèle de loi en puissance – Informations connexes

Le modèle de loi en puissance est largement utilisé pour analyser la fiabilité des entités réparées. Il est particulièrement utile pour les entités classées 'bad-as-old' lorsque la réparation est minime et que par conséquent la fiabilité de l'entité reste en grande partie inchangée après défaillance et réparation. Il est également approprié pour les entités dont la fiabilité est susceptible de s'améliorer. En fait, le modèle de loi en puissance a été étudié pour la première fois par L. H. Crow en 1974 pour décrire la loi en puissance de croissance présentée pour la première fois par J. T. Duane en 1964. Les méthodes d'analyse de la croissance de fiabilité, sur la base du modèle de loi en puissance, sont données par la CEI 61164.

D'après Crow (1974), le modèle probabiliste sous-jacent pour les défaillances peut être formulé comme un processus de Poisson non homogène (NHPP), $\{N(t), t > 0\}$, avec une valeur attendue de:

$$E[N(t)] = \lambda t^\beta$$

et

$$z(t) = \lambda \beta t^{\beta-1}$$

Le modèle NHPP donne la probabilité de Poisson pour que $N(t)$ prenne une valeur particulière, c'est-à-dire:

$$\Pr[N(t) = n] = \frac{(\lambda t^\beta)^n e^{-\lambda t^\beta}}{n!} \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots$$

Aussi, avec ce modèle

$$E[t_j^\beta] = j \quad \text{avec } j = 1, 2, \dots$$

où t_j est le temps cumulé jusqu'à la $j^{\text{ième}}$ défaillance. Cela donne l'utile approximation de premier ordre

$$E[t_j] = \left(\frac{j}{\lambda} \right)^{1/\beta} \quad \text{avec } j = 1, 2, \dots$$

pour l'espérance mathématique du temps jusqu'à la $j^{\text{ième}}$ défaillance.

Lorsque $\beta = 1$, alors $z(t) = \lambda$ et les temps entre défaillances successives suivent une distribution exponentielle de moyenne $1/\lambda$ (Processus de Poisson homogène), indiquant une intensité de défaillance constante. La fonction d'intensité $z(t)$ est décroissante pour $\beta < 1$ (croissance de fiabilité) et croissante pour $\beta > 1$ (détérioration de fiabilité).

Annex A (informative)

The power law model – Background information

The power law model is widely used to analyse the reliability of repaired items. It is particularly useful for those items classified as 'bad-as-old' when repair is minimal and so reliability of the item remains essentially unchanged after failure and repair. It is also appropriate for those items whose reliability is likely to improve. Indeed the power law model was first considered by L. H. Crow in 1974 to describe the power law growth pattern first reported by J. T. Duane in 1964. Methods for reliability growth analysis based on the power law model are given in IEC 61164.

Crow (1974) formulated the underlying probabilistic model for failures as a non-homogeneous Poisson process (NHPP), $\{N(t), t > 0\}$, with an expected value of:

$$E[N(t)] = \lambda t^\beta$$

and

$$z(t) = \lambda \beta t^{\beta-1}$$

The NHPP model gives the Poisson probability that $N(t)$ will assume a particular value, that is:

$$\Pr[N(t) = n] = \frac{(\lambda t^\beta)^n e^{-\lambda t^\beta}}{n!} \quad \text{with } n = 0, 1, 2, \dots$$

Also, under this model

$$E[\lambda t_j^\beta] = j \quad \text{with } j = 1, 2, \dots$$

where t_j is the accumulated time to the j th failure. This gives the useful first-order approximation

$$E[t_j] = \left(\frac{j}{\lambda} \right)^{1/\beta} \quad \text{with } j = 1, 2, \dots$$

for the expected time to the j th failure.

When $\beta = 1$, then $z(t) = \lambda$ and the times between successive failures follow an exponential distribution with mean $1/\lambda$ (homogeneous Poisson process), indicating a constant failure intensity. The intensity function $z(t)$ is decreasing for $\beta < 1$ (reliability growth), and increasing for $\beta > 1$ (reliability deterioration).

Annexe B (informative)

Exemples numériques

B.1 Introduction

Les exemples numériques suivants montrent l'utilisation des procédures présentées à l'article 7. L'exemple 1 étudie les données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte pour une entité unique lorsque l'observation est censurée par une défaillance. L'exemple 2 étudie les données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte pour des exemplaires multiples de la même entité lorsque l'observation est censurée par le temps. L'exemple 3 étudie les données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte de deux entités de populations différentes. L'exemple 4 étudie les groupes de défaillances à prendre en compte pour une seule entité. Tous les exemples illustrent l'utilisation des méthodes d'estimation appropriées. Les tests d'adéquation sont appliqués lorsque cela est pertinent. Ces exemples peuvent être utilisés pour valider les programmes informatiques conçus pour mettre en œuvre les méthodes de l'article 7.

Noter que tous les calculs des exemples ont été effectués en utilisant un tableur. Bien que les résultats soient donnés avec deux ou trois chiffres après la virgule, les calculs intermédiaires ont été effectués avec une précision double. Si des calculs intermédiaires sont effectués avec une précision inférieure, les résultats peuvent varier légèrement par rapport à ceux donnés, en raison des erreurs d'arrondi.

Il convient de noter également que tous les intervalles de confiance présentés sont à un niveau de confiance de 90 % et que de la même manière tous les tests statistiques sont conduits avec un niveau de signification de 10 %. Cela correspond aux valeurs principales données dans les Tableaux 1 à 5. Cependant si les valeurs appropriées sont prises dans des tableaux similaires provenant d'autres sources, ou sont obtenues de manière informatique, alors d'autres valeurs pour les niveaux de confiance et de signification peuvent être choisies en fonction des exigences des utilisateurs.

B.2 Exemple 1

Les temps de défaillance successifs (en heures) d'un logiciel développé comme une partie d'un système important sont donnés dans le Tableau B.1.

**Tableau B.1 – Temps de défaillances à prendre en compte cumulés
pour les systèmes informatiques**

0,2	4,2	4,5	5	5,4	6,1	7,9	14,8	19,2	48,6	85,8	108,9	127,2
129,8	150,1	159,7	227,4	244,7	262,7	315,3	329,6	404,3	486,2			
NOTE $t_N = 486,2 \text{ h}$ $N = 23$.												

Représentation du nombre cumulé de défaillances en fonction du temps

La forme concave de la Figure B.1 indique une intensité de défaillance décroissante.

Annex B (informative)

Numerical examples

B.1 Introduction

The following numerical examples show the use of the procedures discussed in clause 7. Example 1 considers time data for every relevant failure for a single item when observation is failure terminated. Example 2 considers time data for every relevant failure for multiple copies of the same item when observation is time terminated. Example 3 considers time data for every relevant failure of two items from different populations. Example 4 considers groups of relevant failures for a single item. All examples illustrate the use of appropriate estimation methods. Goodness-of-fit tests are applied when appropriate. These examples may be used to validate computer programs designed to implement the methods given in clause 7.

Note that all the calculations in the examples were carried out using a spreadsheet software package. Although the final figures are presented to two or three decimal places, the intermediate calculations were carried out in double precision. If intermediate calculations are computed with less precision, then the final figures might differ slightly from those presented due to rounding errors.

It should also be pointed out that all the confidence intervals presented are at a 90 % confidence level and similarly all the statistical tests are conducted at a 10 % significance level. These correspond to the main values given in Tables 1 to 5. However, if the appropriate values are taken from corresponding tables reported elsewhere or are generated from software, then alternative values for the confidence and significance levels can be chosen according to users' requirements.

B.2 Example 1

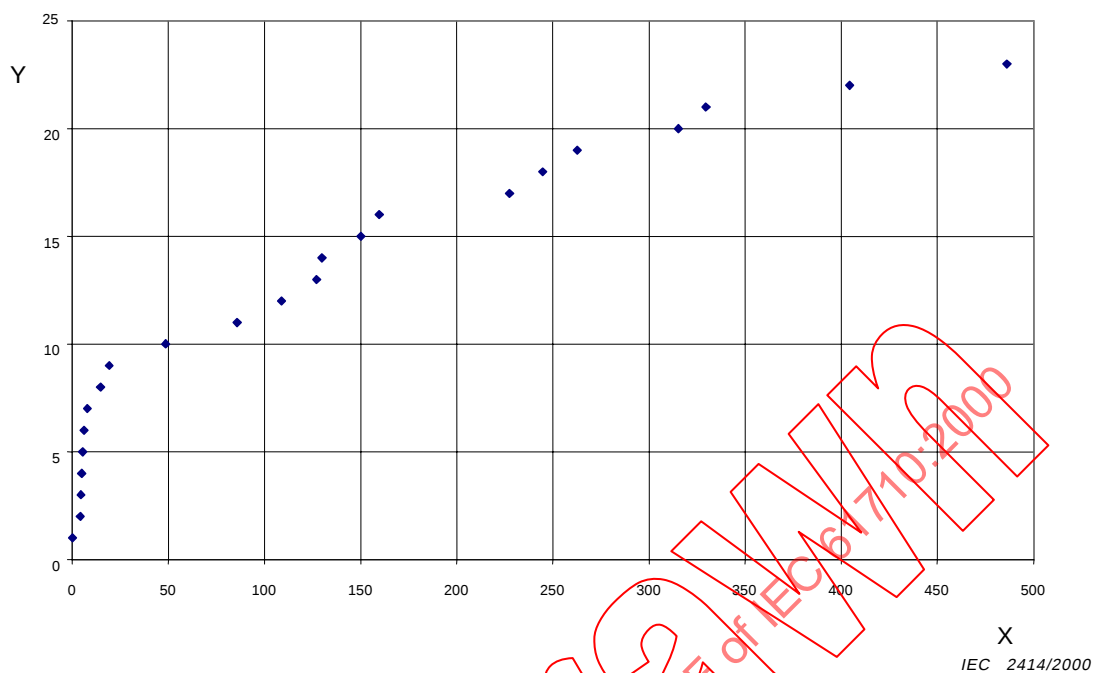
The successive failure times (in hours) of a piece of software developed as part of a large system are given in Table B.1.

Table B.1 – All relevant failures and accumulated times for software system

0,2	4,2	4,5	5	5,4	6,1	7,9	14,8	19,2	48,6	85,8	108,9	127,2
129,8	150,1	159,7	227,4	244,7	262,7	315,3	329,6	404,3	486,2			
NOTE $t_N = 486,2 \text{ h}$ $N = 23$.												

Plot of accumulated failures against time

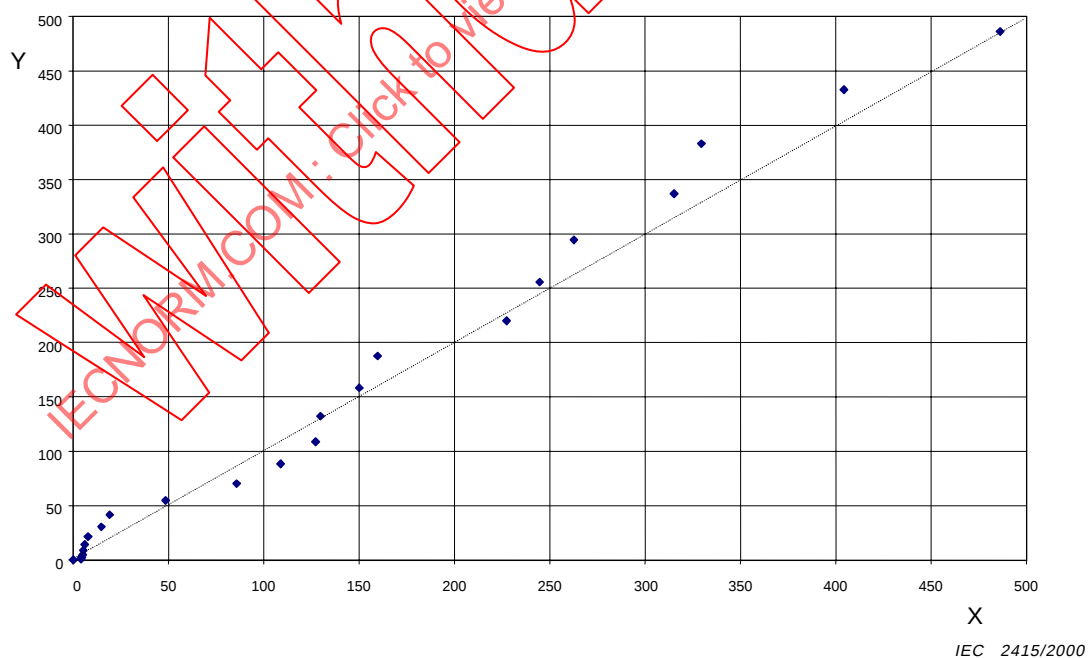
The concave down pattern in Figure B.1 indicates a decreasing failure intensity.



Axe X – temps de fonctionnement cumulé (h)

Axe Y – nombre cumulé de défaillances

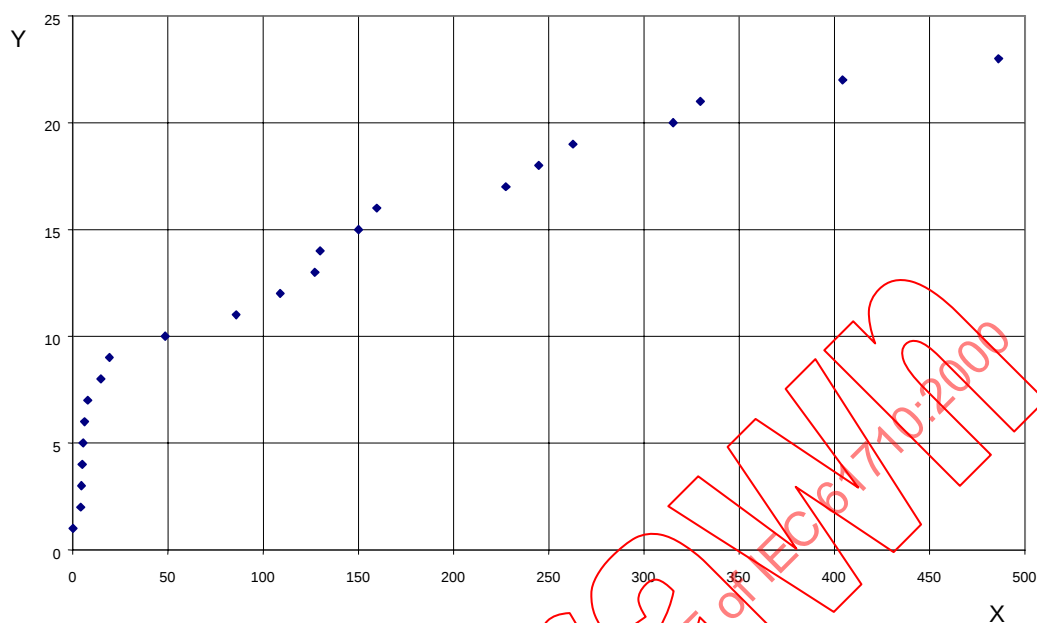
Figure B.1 – Nombre cumulé de défaillances en fonction du temps de fonctionnement pour les systèmes informatiques



Axe X – temps de fonctionnement observés jusqu'à défaillance

Axe Y – temps de fonctionnement cumulé jusqu'à défaillance

Figure B.2 – Temps de fonctionnement cumulé en fonction du temps observé jusqu'à la défaillance pour les systèmes informatiques

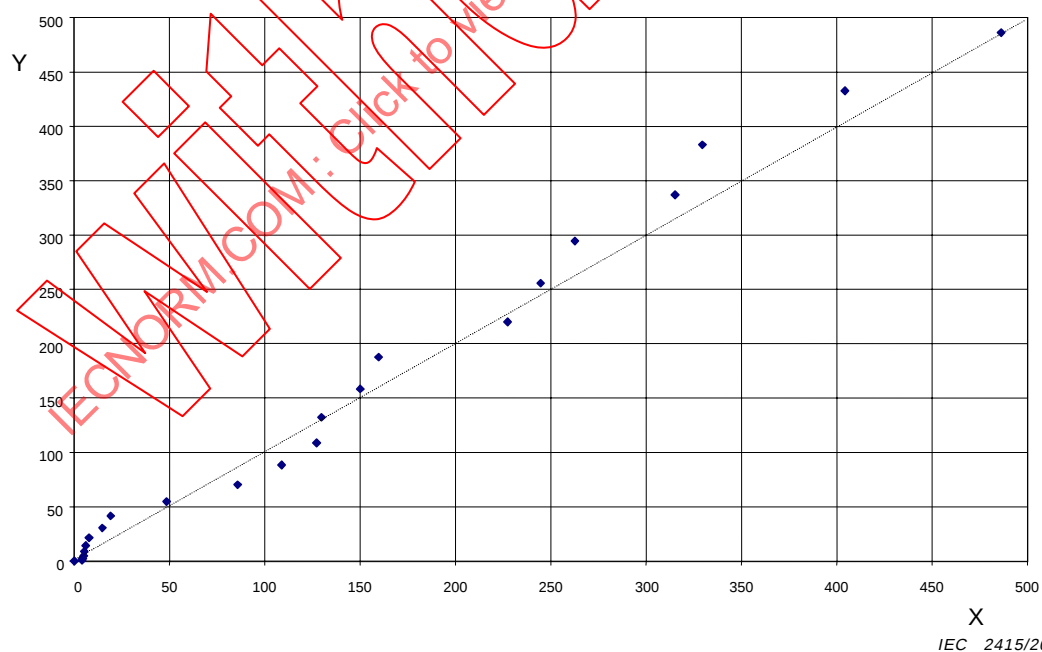


X axis accumulated operating time (h)

Y axis accumulated number of failures

IEC 2414/2000

Figure B.1 – Accumulated number of failures against operating time for software system



Axis X observed failure times

Axis Y expected failure times

IEC 2415/2000

Figure B.2 – Expected against observed accumulated operating times to failure for software system

Estimation des paramètres

D'après 7.2.1, les paramètres estimés du modèle de loi en puissance sont les suivants:

$$\hat{\lambda} = 2,17$$

$$\hat{\beta} = 0,38$$

Test d'adéquation

D'après 7.3.1.2, la représentation des temps de fonctionnement cumulés jusqu'à défaillance par rapport aux temps observés jusqu'à défaillance, à la Figure B.2, montre une répartition aléatoire autour de la ligne 45° indiquant une bonne adaptation du modèle de loi en puissance aux données.

D'après 7.3.1.1, $C^2 = 0,063$ avec $M = 22$. A un niveau de signification de 10 %, la valeur critique du Tableau 1 est 0,172. Comme $0,063 < 0,172$, on peut en conclure que le modèle de loi en puissance décrit les données de manière adéquate.

Intervalle de confiance pour β

D'après 7.4.1, un intervalle bilatéral de confiance à 90 % pour β est (0,27; 0,55). Comme l'intervalle contient des valeurs nettement inférieures à un, il indique une intensité de défaillance décroissante.

Intervalle de confiance pour l'intensité de défaillance

D'après 7.5.1, un intervalle bilatéral de confiance à 90 % pour l'intensité de défaillance à $t = 450$ h est: (0,011; 0,031) défaillances/h.

Intervalle de prédiction pour le temps jusqu'aux défaillances futures

D'après 7.6.1, un intervalle de prédiction bilatéral à 90 % pour la durée de fonctionnement jusqu'à la 24^{ième} défaillance est (488,93; 690,30) h. D'après 7.6.2, Un intervalle de prédiction bilatéral à 90 % pour la durée de fonctionnement jusqu'à la 25^{ième} défaillance est: (504,68; 845,30) h.

B.3 Exemple 2

Cinq copies d'un système ont été mises en fonctionnement au même moment dans des conditions identiques. Lorsqu'un système a connu une défaillance, il a été réparé immédiatement et il a été remis en fonctionnement. Le temps de réparation est insignifiant par rapport au temps de fonctionnement. Chaque copie du système a été observée pendant 1 850 h de fonctionnement. Les temps de fonctionnement cumulés jusqu'à la défaillance sont donnés dans le Tableau B.2.

Parameter estimation

From 7.2.1, the estimated parameters of the power law model are as follows:

$$\hat{\lambda} = 2,17$$

$$\hat{\beta} = 0,38$$

Goodness-of-fit

From 7.3.1.2, the plot of expected against observed failure times in Figure B.2 displays a random scatter around the 45° line indicating a good fit of the power law model to the data.

From 7.3.1.1, $C^2 = 0,063$ with $M = 22$. At a 10 % significance level, the critical value from Table 1 is 0,172. Since $0,063 < 0,172$, it can be concluded that the power law model is a good fit to the data.

Confidence interval for β

From 7.4.1, a two-sided 90 % confidence interval for β is (0,27; 0,55). Since this interval contains values consistently less than one, it indicates a decreasing failure intensity.

Confidence interval for failure intensity

From 7.5.1, a two-sided 90 % confidence interval for the failure intensity at $t = 450$ h is (0,011; 0,031) failures/h.

Prediction interval for the time to future failures

From 7.6.1, a two-sided 90 % prediction interval for the failure time of the 24th failure is (488,93; 690,30) h. From 7.6.2, a two-sided 90 % prediction interval for the time to the 25th failure is (504,68; 845,30) h.

B.3 Example 2

Five copies of a system were put into operation at the same time under identical conditions. When a system failed it was repaired immediately and returned to operation. The repair time is insignificant compared with the operating time. Each copy of the system was observed for 1 850 h of operation. The accumulated operating times to failure are given in Table B.2.

Tableau B.2 – Temps de fonctionnement cumulés pour toutes les défaillances à prendre en compte pour cinq copies d'un système (désignées par A, B, C, D, E)

A	B	C	D	E
96	552	1 056	1 560	
1 224	1 224			
1 392	1 570			

Les données à analyser sont composées par la superposition des temps de fonctionnement jusqu'à défaillance qui sont présentés au Tableau B.3.

Tableau B.3 – Temps de fonctionnement cumulés combinés pour des copies multiples d'un système

Défaillance	Temps de fonctionnement cumulés h
1	96
2	552
3	1 056
4	1 224
5	1 224
6	1 392
7	1 560
8	1 570

Représentation du nombre cumulé de défaillances en fonction du temps

La forme concave de la Figure B.3 indique une possible intensité de défaillance croissante.

Estimation des paramètres

D'après 7.2.1, les paramètres estimés du modèle de loi en puissance sont les suivants:

$$\hat{\lambda} = 3,16 \times 10^{-4}$$

$$\hat{\beta} = 113$$

Test d'adéquation

D'après 7.3.1.2, la représentation des temps de fonctionnement cumulés jusqu'à défaillance en fonction des temps observés jusqu'à défaillance à la Figure B.4 ne présente pas de répartition aléatoire autour de la ligne à 45°, ce qui pourrait indiquer que le modèle de loi en puissance n'est pas bien adapté aux données. Cependant cela n'est qu'un point de vue subjectif.

D'après 7.3.1.1, $C^2 = 0,115$ avec $M = 8$. A un niveau de signification de 10 %, la valeur critique du Tableau 1 est 0,165. Etant donné que $0,115 < 0,165$, on peut en conclure que le modèle de loi en puissance a une bonne adaptation aux données. Ce résultat va à l'encontre de l'impression subjective indiquée ci-dessus. Cela implique que huit défaillances ne sont pas suffisantes pour éliminer l'hypothèse du modèle de loi en puissance. De plus, il convient que les intervalles de confiance indiqués ci-dessous, qui sont calculés sur la base du modèle soient interprétés avec les précautions habituelles pour un ensemble de données aussi réduit.